

Teorema lui Cauchy

ρ ENUNȚUL TEOREMEI

Fie f și g două funcții, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietățile:

- a) f și g continue pe $[a, b]$
- b) f și g derivabile pe (a, b)
- c) $g'(x) \neq 0$

atunci $g(a) \neq g(b)$ și (\exists) cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.i.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ρ DEMONSTRATIA TEOREMEI

$$\Rightarrow g(a) \neq g(b).$$

Fie $h(x) = f(x) + k \cdot g(x)$; k - constanta reală a.i. $h(a) = h(b)$

$$\Rightarrow f(a) + k \cdot g(a) = f(b) + k \cdot g(b)$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = k \cdot g(b) - k \cdot g(a)$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = k(g(b) - g(a))$$

$\left. \begin{array}{l} \text{P.p.a. ca } g(a) = g(b) \\ g \text{ continua pe } [a,b] \\ g \text{ der. pe } (a,b) \end{array} \right\} \Rightarrow (\exists) \text{ cel puțin un punct } c \in (a,b) \text{ a.i. } g'(c) = 0$
 dar $g'(x) \neq 0 \Rightarrow \text{contradicție.}$

$\left. \begin{array}{l} h \text{ continua pe } [a,b] \\ h \text{ derivabilă pe } (a,b) \\ h(a) = h(b) \end{array} \right\} \Rightarrow (\exists) \text{ cel puțin un punct } c \in (a,b) \text{ a.i. } h'(c) = 0;$

$$h'(x) = f'(x) + k \cdot g'(x)$$

$$h'(c) = f'(c) + k \cdot g'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) + k \cdot g'(c) = 0$$

$$\Rightarrow k = -\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ρ INTERPRETARE GEOMETRICA

Pantele celor doua drepte sunt proportionale cu pantele tangentelor duse la graficul functiei in punctul c corespunzator.

ρ APLICATII

1. Sa se aplice TEOREMALUICAUCHY in cazul functiilor :

$$\mathbf{f : [-2,5] \rightarrow \mathbf{R}}$$

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & ; -2 \leq x < 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{7}{4} & ; 1 \leq x \leq 5 \end{cases}}$$

$$\mathbf{g : [-2,5] \rightarrow \mathbf{R} \quad g(x) = x .}$$

$$g'(x) = 1 \neq 0$$

Funcția f este continuă pe $[-2,1)$ și $[1,5]$ ca funcție elementară.
 u.cauchy (\exists) cel puțin un $c \in (-2,5)$ a.i. $\frac{f(c)}{g'(c)} = \frac{f(5) - f(-2)}{g(5) - g(-2)}$
 Se pune problema în $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1; x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \sqrt{x+3} = 2; x \in (-2,1)$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x-3}}{x+7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1; x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; x \in [1,5)$$

$f(1) = 2 \Rightarrow f$ este continuă pe $[-2,5]$

Funcția f este derivabilă pe $[-2,1)$ și $[1,5]$ ca funcție elementară.

Se pune problema în $x = 1$

$$f'(c) = \frac{2}{7}$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1}{4}$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{2\sqrt{x-3}}; g'(c) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{2\sqrt{c-3}}$$

$\Rightarrow f$ este derivabilă pe $[-2,5]$.

Funcția f este continuă și derivabilă pe $[-2,5]$ ca f. elementară.

Cazul 2 : $x \in (1,5)$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{1}{4}; g'(c) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{7} (F)$$

$$\Rightarrow c = \frac{97}{16}$$

f si g sunt derivabile pe (1,e) ca functii elementare

$$g'(x) = (2x - 1)' = 2$$

t. cauchy \Rightarrow (\exists) cel putin un punct $c \in (1,e)$ a.i. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(e) - f(1)}{g(e) - g(1)} = \frac{1}{2e - 2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} ; g'(x) = 2$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{1}{2c} = \frac{1}{2e - 2} \Rightarrow 2c = 2(e - 1) \Rightarrow c = e - 1.$$

2. Sa se aplice Teorema lui Cauchy pentru functiile

$f, g : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x)$ si $g(x) = 2x - 1$, determinand punctul

c corespunzator. Similar pentru functiile $f, g : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbf{R}$

$f(x) = \sin(x)$ si $g(x) = \cos(x)$.

• $f : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \ln(x)$

$g : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$ $g(x) = 2x - 1$

f si g sunt continue pe $[1, e]$ ca functii elementare

• $f : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \sin(x)$

$g : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbf{R}$ $g(x) = \cos(x)$

f si g sunt continue pe $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ ca f elementare

f si g sunt der. pe $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ ca f elementare

$$g'(x) = -\sin(x); \sin(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$

t. cauchy (\exists) cel putin un punct $c \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$
 \Rightarrow

$$\text{a.i. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -1$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\cos(c)}{-\sin(c)} = -\text{ctg}(c) = -1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

3. Sa se studieze valabilitatea teoremei lui Cauchy si sa se determine valoarea punctului c :

$$f : [0,3] \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in (1,3] \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$g : [0,3] \rightarrow \mathbf{R} \quad g(x) = x$$

**Functia f este continua si derivabila pe [0,1] si (1,3]
ca functie elementara.**

Se pune problema in $x = 1$.

Continuitatea

$$\lim_{x \rightarrow 1; x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} -x + \frac{4}{3} = 1/3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1; x > 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 = 1/3$$

$f(1) = 1/3 \Rightarrow f$ este continua pe $[0,3]$.

Derivabilitatea

$$f'_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1; x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1; x > 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{3(x - 1)} = -1$$

$\Rightarrow f$ este der. pe $(0,3)$.

**Functia g este continua si derivabila pe $[0,3]$
ca functie elementara.**

$$g'(x) = 1 \xrightarrow{\text{t. cauchy}} (\exists) \text{ cel putin un punct } c \in (0,3)$$

$$\text{a.i. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(3) - f(0)}{g(3) - g(0)} = -1/9$$

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \in (1,3) \\ -1 & x \in (0,1) \end{cases}$$

$$g'(x) = 1$$

Cazul 1 : $x \in (1,3)$

$$f'(c) = c^2 - 2c ; g'(c) = 1 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = c^2 - 2c = -1/9$$

$$\Rightarrow 9c^2 - 18c + 1 = 0$$

$$\Delta = 288 \Rightarrow c_1 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} \in (1,3)$$

Cazul 2 : $x \in (0,1)$

$$f'(c) = -1 \quad g'(c) = 1 \Rightarrow -1 = -1(A)$$

$$\Rightarrow c = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}$$