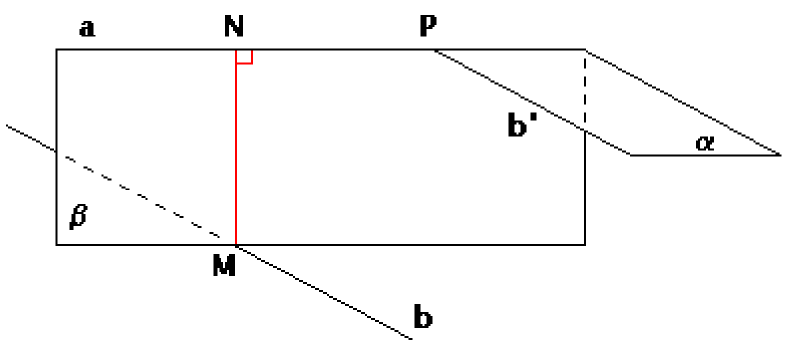
Perpendiculara comuna a doua drepte din spatiu

Daca a,b sunt doua drepte necoplanare, atunci exista o dreapta unica perpendicualra atât pe a cât si pe b , care le întâlneste pe amândoua.

1) Existenta



Fie a,b 2 drepte necoplanare
Fie $P \in a$,prin P duc b' || la b. Consider $\alpha=(a,b')$
Duc $\beta \perp \alpha$, $a \subset \beta$,$\beta \cap b=\{M\}$
Fie $MN \perp a$ ($N \in a$) $\Rightarrow$ MN este dreapta cautata.

$\alpha \perp \beta$ $\Rightarrow MN \perp \alpha$ $\Rightarrow MN \perp b'$ $\Rightarrow$ $MN \perp b$
$MN \subset \beta$ $b' \subset \alpha$ $b' \parallel b$ Dar $MN \perp a$ (constructie)

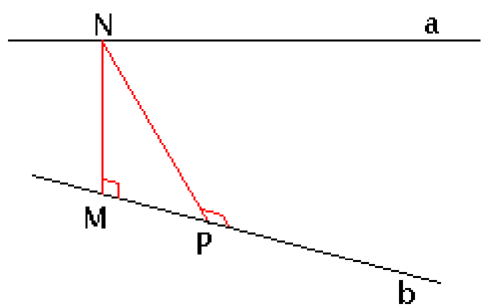
$\Rightarrow (\exists) MN$ a.î $(MN \perp a) \wedge (MN \perp b)$ (a,b necoplanare)

2) Unicitatea

ii) P.p.a ca (∃) 2 drepte cu un punct comun (MN si NP) a.î

$(MN\perp a)\wedge(MN\perp b)$

$(PN\perp a)\wedge(PN\perp b)$



$NM\perp b$

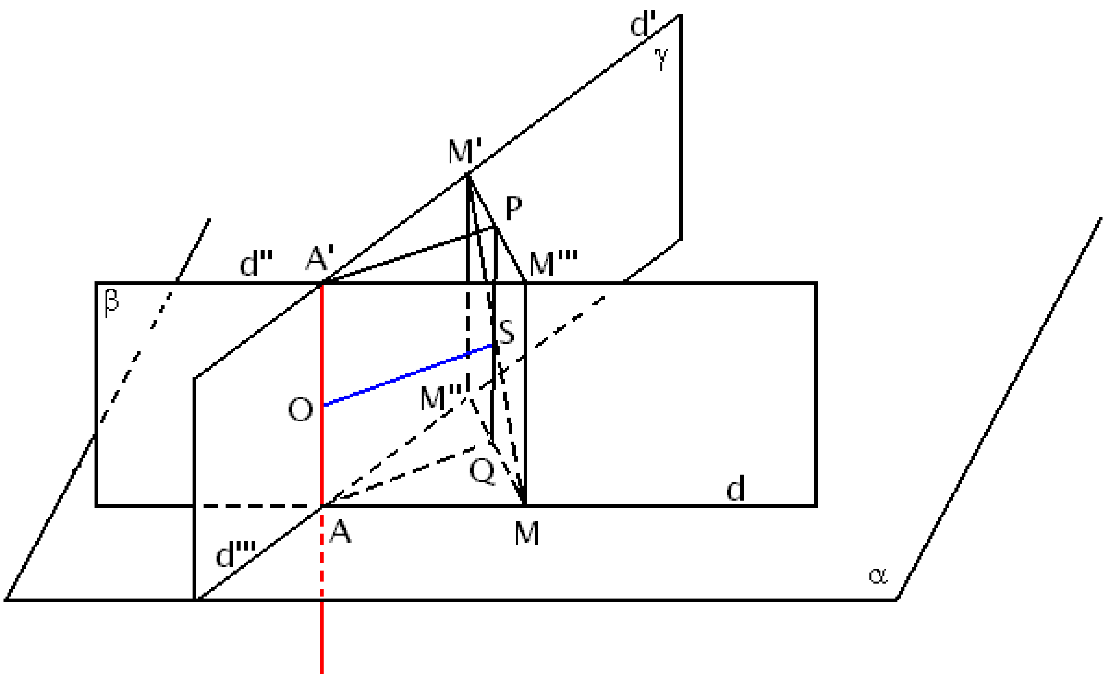
$NP\perp b$ => Dintr-un punct din spatiu am dus pe o dreapta **2** perpendiculare =>F

=>(∃!) MN a.î $(MN\perp a)\wedge(MN\perp b)$

Fie AA' perpendiculara comuna a dreptelor necoplanare d,d' si M$\in$d, M'$\in$d' a.î (AM)$\equiv$(A'M'). Sa se afle locul geometric al mijlocului segmentului [MM'].

Rezolvare

1.Gasirea locului



Fie α a.î d$\subset$α

Fie γ=(AA',d'); AA'$\subset$γ $\Rightarrow$γ$\perp$α

AA'$\perp$d $\Rightarrow$ AA'$\perp$α

d$\subset$α

γ$\cap$α=d''

Prin A' duc d'''||d => (d''',d)=β

Duc M'M''$\perp$α

γ$\perp$α $\Rightarrow$ M''$\subset$γ $\Rightarrow$ M''$\in$d''

M'$\subset$γ γ$\cap$α={d''}

Fie MM'''$\perp$d''' (M'''$\in$d''')

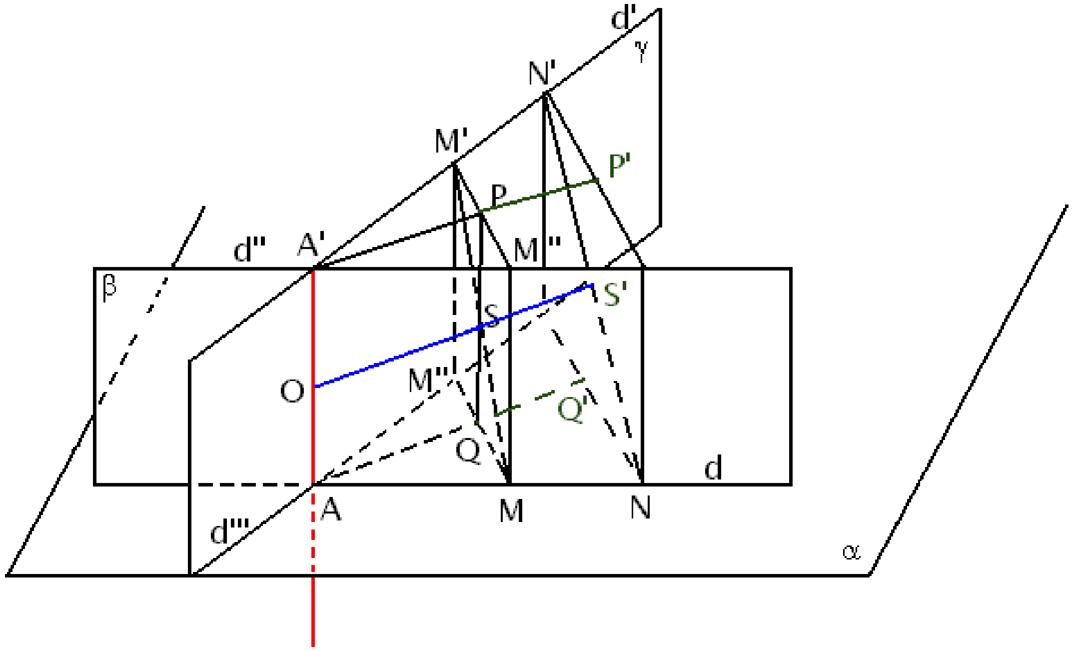
M'M'''||MM'' $\Rightarrow$MM'''M''M'=paralelogram

$M'''M \perp d \quad \Rightarrow M'''M \,||\, AA' \,||\, M''M'$
$AA' \perp d$

Fie S a.î $[M'S] \equiv [SM]$
P a.î $[M'P] \equiv [PM''']$
Q a.î $[M''Q] \equiv [QM]$
$[PQ] \,||\, M''M' \Rightarrow [PQ] \,||\, [AA']$

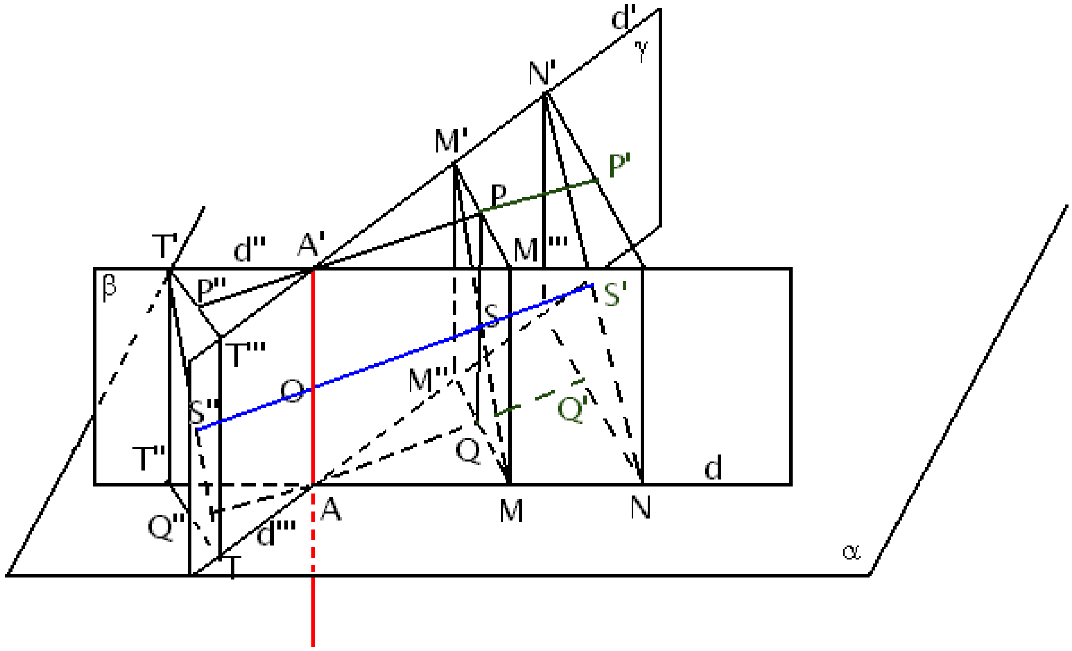
$\Rightarrow (PQ,AA')$= plan mediator pentru diedrul (γ,β)
$AA' \perp d$
$AA' \perp d'' \Rightarrow AA' \perp (d,d'')$
$A \in (d,d'') \quad \Rightarrow AQ \subset (d,d'') \Rightarrow AA' \perp AQ$
$Q \in (d,d'') \quad AA' \,||\, PQ \Rightarrow$
$\Rightarrow AA'PQ$=dreptunghi
Fie $\beta'=[AA',M$ si $\gamma'=[AA',M'$
Pt $M'=A'$ si $M=A$, $O \in$ l.g
Unim pe O cu S (mijloacele a 2 laturi paralele în dreptunghi)
$\Rightarrow OS \perp AA'$ si $OS \perp PQ$

2. $(\forall)$ $N \in d$ si $N' \in d'$ a.î $|A'N'|=|AN|$ si $|NS'|=|N'S'|$ => $OS' \perp AA'$ si $OS'=OS$



Se construieste dreptunghiul A’P’Q’A situat în planul mediator al diedrului (β,γ)
Analog ca la punctul anterior.
⇒OS’⊥A’A
⇒OS’=OS (pe o dreapta (AA’) din plan (planul mediator), pe un punct (O) se poate duce o singura perpendiculara)
⇒l.g al mijlocului segmentului MM’ este o dreapta perpendiculara pe AA’ în mijlocul ei , situata în planul mediator al diedrului (γ,β)

3.Fie S’’ ∈planului mediator al diedrului (β,γ), S’’O⊥AA’ ⇒ [A’T’]≡[AT]
T,T’ sunt coturile paralelogramuli în care S’’ e mijlocul diagonalei TT’



A'P"≡AQ" A'P"Q"A dreptunghi (analg dem. anterioara)
[T'P"]≡[P"T'''] (plan mediator)

⇒△T'A'P''≡△T'''A'P'' ⇒T'A'≡A'T'''

A'T'''≡TA ⇒ T'A'≡TA

⇒l.g este format din reuniunea a doua drepte perpendiculare ce trec prin mijlocul segmentului [AA'],situate în planul mediator al planelor determinte de cele doua drepte (d,d') si paralelele duse la fiecare din ele prin piciorul perpendicularei comune.