Operaţii cu funcţii derivabile. Derivatele unor funcţii uzuale

Am întâlnit deja exemple de funcţii derivabile. Este utilă o sinteză a derivatelor funcţiilor uzuale şi se impune stabilirea unor reguli generale de derivare a sumelor, produselor, compunerilor etc. de funcţii derivabile.

II.1^{o} Derivatele câtorva funcţii uzuale

a) Orice funcţie constantă $f: R \to R$, $f(x)=c$ este derivabilă pe R, cu derivata nulă

$$c' = 0 \qquad (1).$$

b) Funcţia putere $f: R \to R$, $f(x) = x^n$ (n real şi $x > 0$) este derivabilă pe R şi $f'(x)=nx^{n-1}$.

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbf{R} \qquad (2).$$

c) Funcţia logaritmică $f: (0, +\infty) \to R$, $f(x) = \ln x$ este derivabilă pe domeniul de definiţie şi are derivata

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad (3).$$

d) Funcţiile trigonometrice $f, g: R \to R$, $f(x) = \sin x$, $g(x)=\cos x$ sunt derivabile pe R şi pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

Demonstraţiile tuturor acestor derivate se fac uşor folosind definiţia derivatei.

Reguli de derivare

In continuare arătăm că pentru funcţii ca $f, g : E \to R$ derivabile, $E \subset R$, funcţiile $f + g$, $f - g$, fg etc. au aceeaşi proprietate.

Teorema 1

Presupunem că f, g sunt derivabile în punctul $x_0 \in$ E şi λ o constantă.
Atunci :

(a) suma $f + g$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g(x_0)$$

(b) λf este derivabilă în x_0 şi

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

(c) produsul fg este o funcţie, derivabilă în x_0 şi

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

<u>Teroema 2</u>

Presupunem că f şi g sunt derivabile în x_0 şi că $g(x_0) \neq 0.$. Atunci funcţia – cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi, în plus :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Derivarea unei funcţii compuse şi a inversei unei funcţii

Trecem acum la stabilirea altor două teorema generale de derivare, relativ la compunere şi inversare. Deosebit de importantă este formula de derivare a funcţiilor compuse. In acest sens, are loc:

<u>Teorema 3</u>

Fie I, J intervale şi $\mathbf{I} \xrightarrow{f} \mathbf{J} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ două funcţii. Dacă f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, şi g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcţia compusă $G = g \circ f$ este derivabilă în x_0 şi $G'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. Dacă f este derivabilă pe I, g este derivabilă pe J, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe I şi are loc formula :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

<u>Teorema 4</u>

Fie $f: I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă între două intervale. Presupunem că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi, în plus,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Derivatele funcţiilor uzuale şi a regulilor de derivare

Reguli de derivare

1. $\left(f \pm g\right)' = f' \pm g', \left(\lambda \cdot f\right)' = \lambda \cdot f'$;

2. $\left(fg\right)' = f'g + g'f$;

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$;

4. $\left(g\left(f\right)\right)' = g'\left(f\right) \cdot f'$; $\left(f\right)^{-1} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\right)}$.

O funcţie f*: [a, b]* $\rightarrow$*R (a< b)* se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis *(a, b).*

Teorema care urmează este o consecinţă a rezultatelor privind funcţiile şi a teoremei lui Fermat, foarte utilă în aplicaţii.

Teorema lui M. Rolle

Fie f*: [a, b]*$\rightarrow$ *R a< b* o funcţie Rolle astfel încât f*(a)=* f*(b)*, atunci există cel puţin un punct *c*$\in$ *(a, b)* astfel încât f*'(c)=0*.

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă (conform teoremei lui Weierstrass) este mărginită şi îşi atinge marginile în *[a, b]*. Fie *m*= $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, *M*= $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Apar trei cazuri :

I. *M>* f*(a)*. Există un punct *c*$\in$ *[a, b]* astfel încât *M=*f*(c)* (*M* fiind atinsă) şi, evident, *c*$\neq$ *a*, *a*$\neq$*b* (dacă *c*= *a* sau *b*, atunci *M*= f*(c)* ar fi egal cu f*(a)*= f*(b)*, absurd); aşadar, *c*$\in$ *(a, b)* şi cum *c* este maxim local, atunci conform teoremei lui Fermat f*'(c)=0.*

II. *m<* f*(a)*. Similar.

III. *m= M.* Atunci funcţia f este constantă pe *[a, b]*, deci f*'(c)=0* pentru orice *c*$\in$ *(a, b).*

COROLAR. Intre două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zerou al derivatei.

Demonstraţie. Fie f*: I*$\rightarrow$*R derivabilă pe un interval I şi a, b I, a< b, zerouri ale lui* f*. Atunci* f*(a)=0=*f*(b) şi putem aplica teorema lui Rolle pe intervalul [a, b].*

Teorema lui Rolle admite o interpretare geometrică evidentă: dacă segmentul determinat de punctele *(a,* f*(a)), (b,* f*(b))* este paralel cu axa O*x*, atunci există cel puţin un punct între a şi b în care tangenta la graficul lui f este paralelă cu axa O*x* (fig. 6).

Observaţii. Toate condiţiile din enunţul teoremei lui Rolle sunt necesare, în sensul că dacă s-ar renunţa la vreuna din ele, atunci concluzia nu ar mai fi întotdeauna adevărată.

a) Dacă f ar fi continuă numai pe intervalul deschis *(a, b)*, exemplul funcţiei $f(x) = \begin{cases} x, \text{daca } x \in (0,1] \\ 1, \text{daca } x = 0 \end{cases}$ arată că f*'* nu se anulează pe intervalul *(0, 1)* deşi f*(0)=*f*(1).* (fig. 7).

b) Dacă f(a) $\neq$ f(b), este suficient să considerăm funcţia f*(x)= x* pe *[0, 1]* (fig 8).

c) Dacă f nu ar fi derivabilă pe întreg intervalul (a, b), concluzia teoremei ar fi falsă, aşa cum arată exemplul funcţiei $f(x)=|x|$ pe intervalul $[-1, 1]$.

Teorema lui Cauchy

Fie f, g două funcţii Rolle pe intervalul compact $[a, b]$, $a< b$, astfel încât $g'(x) \neq 0$, $x\in(a, b)$; atunci există un punct $c\in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstraţie. Condiţia $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x\in(a, b)$ implică faptul că $g(a) \neq g(b)$; într-adevăr, dacă $g(a)=g(b)$, aplicând teorema lui Rolle , ar rezulta că există $c\in (a, b)$ astfel ca $g'(c)=0$, ceea ce contravine ipotezei.

Considerăm funcţia ajutătoare $F(x)=f(x)+kg(x)$, $k\in R$ şi determinăm k astfel ca $F(a)=F(b)$, deci $k=\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}$. Aplicând teorema lui Rolle funcţiei F cu k astfel determinat, există $c\in (a, b)$ astfel încât $F'(c)=0$. Dar $F'(x)=F'(x)+kg'(x)$, $x\in (a, b)$, deci $f'(c)+kg'(c)=0$, $-k=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, de unde se obţine relaţia ce trebuia demonstrată.

Observaţie. Am fi putut mai întâi sa demonstrăm teorema lui Cauchy şi apoi, pentru $g(x)=x$, am fi demonstrat teorema lui Lagrange..

In cele ce urmează, vom indica o proprietate importantă a funcţiilor care admit primitive, deci care sunt derivate ale altor funcţii.

Teorema lui Darboux

Dacă f: $I\rightarrow R$ este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux (adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).

Demonstraţie. Fie $a<b$ două puncte din I astfel încât $f'(a)=f'(b)$. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $f'(a)<f'(b)$. Fie $\lambda\in (f'(a), f'(b))$. Trebuie arătat că există un punct $c\in (a, b)$ astfel încăt $f'(c)=\lambda$. Pentru aceasta vom considera funcţia auxiliară $F(x)=f(x)-\lambda x$; evident, $F'(a)=f'(a)-\lambda<0$ şi $F'(b)=f'(b)-\lambda>0$.

Funcţia F este derivabilă, deci continuă în intervalul $[a, b]$ şi, ca atare, marginea inferioară $m=\inf_{x\in[a,b]} F(x)$ este atinsă, într-un punct $c\in [a, b]$. Vom arăta că de fapt m nu poate fi atins nici în a, nici în b. Aşadar, $c\in (a, b)$ şi din teorema lui Fermat se obţine $F'(c)=0$. Dar aceasta arată că $f'(c)-\lambda=0$, adică $f'(c)=\lambda$, tocmai ce trebuia verificat.

Pentru a arăta că punctul c aparţine intervalului (a, b), vom proceda astfel: alegem $\varepsilon>0$ astfel încât $|F'(a)|>\varepsilon$ şi $F'(b)>\varepsilon$. Din definiţia derivatei lui F în punctele a şi b, există $\delta>0$ depinzând de ε astfel încât din faptul că $|x- a|>\delta$ (respectiv $|x- b|>\delta$) să rezulte că

Deoarece *F'(a)+ε<0*, raportul va fi strict negativ, pentru orice $x> a$, $x-a<\delta$. Deci *F(x)-(a)<0*, adică *F(x)<F(a)*. In mod analog, din inegalitatea *F'(b)-ε>0*, rezultă că *F(x)<F(b)* pentru $x< b$, $x- b<\delta$. Aceste inegalităţi arată că marginea inferioară a funcţiei *F* nu este atinsă nici în *a*, nici în *b*.

$$F(a)-\varepsilon<\frac{F(x)-F(a)}{x-a}<F(a)+\varepsilon$$

$$\left[\text{respectiv} F(b)-\varepsilon<\frac{F(x)-F(b)}{x-b}<F(b)+\varepsilon\right].$$

COROLAR. *Fie f:* I→R *o funcţie derivabilă pe un interval* I. *Dacă derivata f' nu se anulează pe* I*, atunci f' are semn constant pe* I.

Intr-adevăr, dacă *f'* nu ar avea semn constant pe *I*, atunci *f'* ar lua valori pozitive şi valori negative pe *I*, deci, conform teoremei lui Darboux, ar lua valoarea zero, ceea ce contravine ipotezei că *f'* nu se anulează pe *I*.