UNIVERSITATEA POLITEHNICA BUCUREŞTI

ASUPRA TRANSFORMATEI LAPLACE RAPIDE

CUPRINS

1. Introducere……………………………………………………3

2. Scurt istoric…………………………………………………...4

3. Breviar teoretic....…………………………………………..5

4. Transformarea Laplace rapidă……………………………...7

5. Aplicaţii ale transformatei Laplace…………………………9

6. Bibliografie…………………………………………………...11

1. INTRODUCERE

Lucrarea constă in efectuarea unui studiu asupra transformării Laplace rapide.

Cele mai importante transformări integrale sunt transformările Laplace şi Fourier. Acestea sunt utilizate curent de în teoria circuitelor, în probleme liniare de mecanică, în rezolvarea unor ecuaţii integrale, dar şi în studiul sistemelor dinamice, studiul vibraţiilor şi al ecuaţiilor fizicii matematice.

La o ecuaţie diferenţială, metoda Laplace este o metodă cunoscută, dar aceasta nu mai este universal aplicabilă – nu rezolvă orice ecuaţie. Similar, calculul inversei unei transformate Laplace nu se poate face efectiv cu metoda clasică de descompunere în funcţii simple.

Lucrarea conţine un breviar teoretic necesar creării algoritmului de calcul a valorilor unei funcţii original Laplace in diverse puncte discrete.

Partea de importanţă majoră in cadrul proiectului constă în prezentarea unui algoritm prin care, fiind dată o funcţie olomorfă, $F(p)$, recuperăm originalul Laplace $f(t)$, dar nu ca funcţie explicită, ci prin valorile funcţiei f intr-un şir discret de puncte. Vom arăta cum se pot calcula valorile lui f in diverse puncte discrete.

În final se regăsesc câteva domenii importante de aplicabilitate a transformatei Laplace.

2. SCURT ISTORIC

Pierre-Simon Laplace a fost unul dintre cei mai străluciţi astronomi din istorie în acest domeniu. Acest francez a prezis prin calcule matematice multe lucruri care mai târziu au putut fi observate cu telescoape puternice. Laplace s-a născut pe 23 martie, 1749, in Baeumont-en-Auge, un oraş din Normandia. Tatăl său a fost sărac, şi Pierre-Simon a primit educaţie puţin mai târziu. Vecinii mai bogaţi s-au interesat oarecum de el şi l-au trimis la universitate în Caen. Acolo s-a descurcat foarte bine în matematică. La vârsta de 18 ani a mers la Paris cu o scrisoare in care explica principiile mecanicii pentru a o da lui Jean d'Alembert, un matematician de seamă la acea vreme. D'Alembert a fost impresionat şi l-a ajutat pe tânărul Pierre să obţină un post de profesor de matematică la Şcoala Militară.

LaPlace a câştigat multe premii pentru studiile sale şi a fost făcut marchiz, dar a rămas modest spunând:"Ceea ce ştim este puţin . Ceea ce ştim nu este imens". A murit la Paris pe 5 martie, 1827.

3. BREVIAR TEORETIC

Definiţia Transformatei Laplace

O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numeşte funcţie – original Laplace dacă ea satisface următoarele trei condiţii:

- $f(t)=0$ pentru orice $t<0$;
- f este continuă pe porţiuni;
- Există constantele reale $M>0, s_0\geq 0$ astfel încât $|f(t)|\geq Me^{s_0 t}$, pentru orice $t\geq 0$.

Prima condiţie este justificată de faptul că multe funcţii, semnale etc. care descriu procese, fenomene fizice sunt nule până la un moment t_0, de la care începe procesul sau fenomenul fizic respectiv; se poate lua $t_0=0$.

A doua condiţie reprezintă o condiţie de regularitate şi revine la faptul că în orice interval mărginit $[0,A]$, $A>0$ funcţia f are cel mult un număr finit de discontinuităţi, unde în plus există derivate laterale.

A treia condiţie asigură convergenţa anumitor integrale improprii care vor interveni in dezvoltările ulterioare. Ea se exprimă spunând că f este majorată de o exponenţială sau că f are creştere cel mult exponenţială. Marea majoritate a funcţiilor elementare, utilizate în calculul operaţional satisfac această condiţie. Numărul real $s_0\geq 0$ se numeşte indice de creştere al funcţiei f.

Transformate Laplace des utilizate

$f(t)$	$F(s)=L\left[f(t)\right]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
t	$1/s^2$
t^n	$n!/s^{(n+1)}$
$e^{\omega t}$	$1/(s-a)$
$\sin(at)$	$a/\left(s^2+a^2\right)$

$\cos(at)$	$s/\left(s^2+a^2\right)$
$sh(at)$	$a/\left(s^2-a^2\right)$
$ch(at)$	$s/\left(s^2-a^2\right)$

Definiţia Transformatei Fourier

Se ştie că o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ cu valori complexe, $f=u+iv$ este integrabilă dacă u şi v sunt funcţii integrabile $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Orice funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continuă pe porţiuni astfel încât $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty$ se numeşte funcţie – original pentru transformata Fourier. Se notează cu $L_1(\mathbb{R})$ mulţimea tuturor funcţiilor original.

Pentru orice $f\in L_1(\mathbb{R})$, se numeşte transformata Fourier a funcţiei f (sau funcţie imagine).

$g(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$, $(\forall)\omega\in\mathbb{R}$, se mai notează $g=\hat{f}$

Formula lui Mellin-Fourier de inversare a transformării Laplace

Fie $f\in\Omega$, cu indicele de creştere s_0 şi cu proprietatea că are derivate laterale finite în orice punct $t\in\mathbb{R}$. Dacă $f(t)\xrightarrow{L}F(p)$, atunci pentru orice $\sigma>s_0$ avem $\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega$.

Relaţia între Transformata Laplace şi Transformata Fourier

O relaţie similară cu cea anterioară, poate fi găsită şi în acest caz. Întradevăr, transformata Laplace este:

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

şi deci pentru $s=j\omega$ se obţine transformata Fourier. Avem binecunoscuta proprietate că transformata Fourier este transformata Laplace evaluată pe axa imaginară.

4. TRANSFORMATA LAPLACE RAPIDĂ

Vom da un algoritm pentru a recupera o funcţie original Laplace din cunoaşterea imaginii sale $F(p)$, folosind algoritmi FFT (Fast Fourier Transform).

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ o funcţie continuă original Laplace, având indicele de creştere exponenţiala $s_0 \geq 0$ (deci $f(t)=0$ pentru $t<0$ şi există $M>0$ astfel încât $\left|f(t)\right| \leq Me^{s_0 t}$, pentru orice $t \geq 0$).

Imaginea Laplace a lui f este funcţia complexă $F(p)=L\left\{f(t)\right\}$, definită prin $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ care este olomorfă în semiplanul drept $\operatorname{Re} p > s_0$ şi în plus, $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$. Fixăm $a>s_0$. Punând $p=a+i\omega$, rezultă $F(p)=\int_{-\infty}^\infty e^{-at} f(t) e^{-i\omega t}\,dt$ şi conform formulei de inversare Fourier, rezultă

$$e^{-at} f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(a+i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{1}$$

Presupunând cunoscută funcţia F, vom arăta cum se pot calcula valorile lui f in diverse puncte discrete.

Fixăm $\tau>0$ şi notăm $T=\dfrac{2\pi}{\tau}$. Pentru orice întreg $m \geq 0$, notăm $x_m=e^{-am\tau} f(m\tau)$ şi rezultă conform (1), $x_m=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(a+i\omega)e^{i\omega m\tau}\,d\omega$ deci, $x_m=\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}\int_{\frac{2n\pi}{\tau}}^{\frac{2(n+1)\pi}{\tau}} f(a+i\omega)e^{i\omega m\tau}\,d\omega$ sau $x_m=\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}\int_{\frac{2n\pi}{\tau}}^{\frac{2(n+1)\pi}{\tau}} f(a+iu)e^{ium\tau}\,du$. Făcând schimbarea de variabilă din u în ω, $u=\dfrac{2\pi n}{\tau}+\omega=nT+\omega$, v-a rezulta

$x_m=\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}\int\limits_0^T F\left(a+i(nT+\omega)\right)e^{i\omega m\tau}\,d\omega.$

Aşadar, notând

$$G(\omega)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} F\left(a+i(nT+\omega)\right) \tag{2}$$

rezultă conform teoremei seriilor Fourier:

$$x_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^T G(\omega)e^{i\omega m\tau}\,d\omega \tag{3}$$

Deoarece G este o funcţie periodică de perioadă T, din formula (3) rezultă $G(\omega)=\sum\limits_{m\in\mathbf{Z}}\tau x_m e^{-im\omega\tau}$.

Fixăm $N ? 2$ întreg şi punem $v = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$.Pentru frecvenţele $\omega = \frac{2\pi k}{\tau N},\ k \in \mathbf{Z}$, rezultă

$$v^{kN} = e^{-\frac{2\pi i}{N\tau}km\tau} = e^{-im\omega\tau}$$

$$G\left(\frac{2\pi k}{\tau N}\right) = \tau \sum_{m \in \mathbf{Z}} x_m v^{km}$$

Deoarece $x_m = 0$ pentru $m < 0$ şi $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = 0$ $\left(a > s_0\right)$ rezultă $\frac{1}{\tau} G\left(\frac{2\pi k}{\tau N}\right);\ \sum_{m=0}^{N-1} x_m v^{km}$ $\quad pentru\ 0 \le k \le N-1$,
adică $\frac{1}{\tau} G\left(\frac{T}{N} k\right);\ \sum_{m=0}^{N-1} x_m v^{km} = TFD\left((x_m)\right)$, unde TFD reprezintă Transformata Fourier Discretă.

Aplicând $ITFD = TFD^{-1}$, rezultă:

$$x_m = \frac{1}{\tau} ITFD\left\{G\left(\frac{T}{N} k\right)\right\} \quad pentru \quad \begin{cases} 0 \le k \le N-1 \\ 0 \le n \le n-1 \end{cases} \tag{4}$$

Rezultă următorul algoritm pentru a inversa Transformarea Laplace cu ajutorul Transformatei Fourier discrete:

Pasul 1: Este dată funcţia F . Fixăm $N ?\ 2,\ a > s_0$ si $\tau > 0$.

Pasul 2: Fie $T = \frac{2\pi}{\tau}$. Se calculează valorile $G(0), G\left(\frac{T}{N}\right), \dots, G\left(\frac{(N-1)T}{N}\right)$, utilizând formula (2).

Pasul 3: Folosind IFFT se calculează x_m, pentru $0 \le m \le N-1$, cu ecuaţia (4).

Pasul 4: Se calculează $f(m\tau) = x_m e^{am\tau}$ pentru $0 \le m \le N-1$.

5. APLICAŢII ALE TRANSFORMATEI LAPLACE

Fie $f(t)=\begin{cases} e^{-t} & ,t\geq 0 \\ 0 & ,t<0 \end{cases}$

In acest caz $F(p)=\dfrac{1}{p+1}$ şi avem $s_0=0$

Alegem $a=0$;

Luăm $\left.\begin{matrix} N=64 \\ \tau=\dfrac{1}{10} \end{matrix}\right\} \Rightarrow T=20\pi$

Aşadar , $G(\omega)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} F\left(i(20n\pi+\omega)\right)\cong\sum_{n=0}^{20}\dfrac{1}{1+i(20n\pi+\omega)}$

Se consideră şirul finit de lungime 64:

$$G\left(\left\{\frac{T}{N}k\right\}\right)=G\left(\left\{\frac{20\pi}{64}k\right\}\right)=G\left(\left\{\frac{5\pi}{16}k\right\}\right)=\left\{G(0),G\left(\frac{5\pi}{16}\right),.....,G\left(\frac{5\pi}{16}63\right)\right\}$$

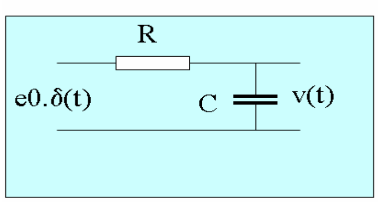
$0\leq k\leq N-1$

Aplicând (4), se determină şirul de 64 de valori $\{x_m\}, 0\leq m\leq 63$, de unde rezultă $f(m\tau)=x_m e^{am\tau}=x_m \quad ,a=0$

Acest exemplu este banal , dar algoritmul se poate aplica şi în cazul unde metodele clasice nu sunt posibile.

Transformata Laplace este utilizată în diverse domenii precum în Electrotehnică la rezolvarea problemelor de circuit, în prelucrarea digitală a semnalelor, la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, la rezolvarea sistemelor liniare şi altele.

Circuitul RC



Ecuatia care descrie circuitul

$$\boxed{\begin{matrix} e(t)=RC\dfrac{dv}{dt}+v(t) \\ v(0)=0 \end{matrix}}$$

Transformata Laplace $\quad E(s)=RCsV(s)+V(s)=V(s)[1+RCs]$

$$\boxed{V(s)=\frac{E(s)}{1+RCs}}$$

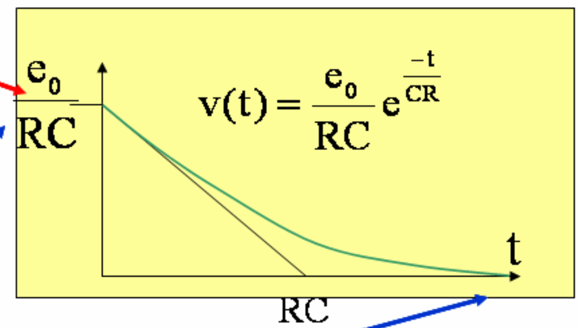
Functia impuls

$$e(t) = e_0\delta(t) \qquad E(s) = e_0 \qquad \boxed{V(s) = \frac{e_0}{1+RCs}}$$

$$\boxed{V(s) = \frac{1}{(s+\frac{1}{RC})}\frac{e_0}{RC}}$$

$$e^{-\frac{t}{CR}}$$

Raspunsul impulsului



$s \to \infty$

$$\boxed{sV(s) = \frac{se_0}{(RCs+1)}}$$

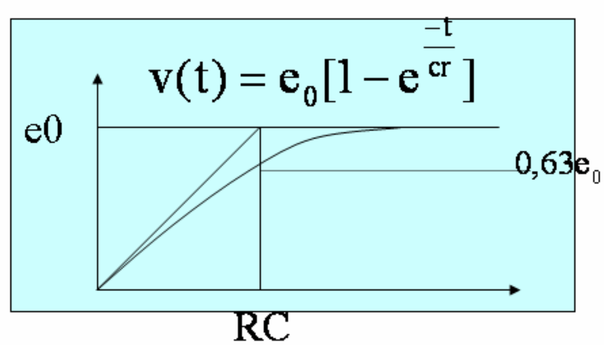
$s \to 0$

Functia pasului

$$e(t) = e_0u(t) \qquad E(s) = \frac{e_0}{s} \qquad \boxed{V(s) = \frac{e_0}{s(1+RCs)}}$$

$$\boxed{V(s) = \frac{e_0}{s} - \frac{e_0}{(s+\frac{1}{RC})}}$$

$$v(t) = e_0 - e_0e^{\frac{-t}{CR}} = e_0[1-e^{\frac{-t}{CR}}]$$



6. BIBLIOGRAFIE

T. Stănăşilă: Matematici avansate, Fair Partners, 2005

R. Zaciu: Prelucrarea digitală a semnalelor, Editura Albastra, 2002

D. Stanemir: Semnale şi sisteme discrete, Atena Bucuresti, 1997

http://www.prodlogsys.ici.ro/ici/revista/ria2005_2/art05.html

http://www.sosmath.com/diffeq/laplace/application/application.html

http://people.deas.harvard.edu/~jones/es154/lectures/lecture_0/Laplace/laplace.html%20

http://www.eas.asu.edu/~vasilesk/EEE202/LaplaseTransform.pdf

http://www.du.edu/~jcalvert/math/laplace.htm

http://lorien.ncl.ac.uk/ming/dynamics/laplace.pdf

http://claymore.engineer.gvsu.edu/~jackh/books/model/chapters/laplace.pdf

http://www.math.okstate.edu/~binegar/2233-S99/2233-l29.pdf