C.m.m.d.c. şi C.m.m.m.c.

C.m.m.d.c

Definitie. Numărul întreg d este cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al numerelor întregi a şi b (notăm d=(a, b)), dacă satisface condiţiile:
d | a şi d | b;
pentru orice întreg δ, pentru care δ|a şi δ|b, rezultă δ|d.
Lemă. Fie m, n, p trei numere naturale astfel încât m=n+p. Dacă numărul natural nenul q divide oricare două dintre numerele m,n,p atunci q divide şi pe al treilea număr.
Demonstraţie. Fie q|n şi q|p. Atunci $\exists$ u, v $\in$ N : n=qu şi p=qv. Rezultă m=q(u+v), deci q|m. Fie acum q|m şi q|n. Atunci $\exists$ t, s $\in$ N : m=qt şi n=qs. Din qt=qs+p rezultă qs ≤ qt şi cum q>0 obţinem s ≤ t, de unde rezultă că $\exists$ w $\in$ N aşa încât t = s+w. Din qt = qs+p rezultă qs+qw=qs+p, deci qw=p, unde q|p.
Analog se arată că din q|m şi q|p rezultă q|n.
Lemă. Dacă x, y,q,r $\in$ N satisfac egalitatea x=yq+r atunci există cel mai mare divizor comun al lui x şi y dacă şi numai dacă există cela mai mare divizor comun al lui y şi r. În plus, avem (x, y) = (y, r).
Demonstraţie. Presupunem că există cel mai mare divizor comun al lui x şi y, pe care-l notăm cu d. Din d|x şi d|y rezultă, conform lemei anterioare, că d|r, deci avem d|y şi d|r.
Fie acum d’ $\in$ N, aşa încât d’|y şi d’|r. Conform aceleaşi leme, rezultă că d’|x şi deci d’|x şi d’|y, adică d’|d. Aşadar, d este cel mai mare divizor comun al lui y şi r şi avem (y, r) = d = (x, y).
Reciproc, presupunând că există cel mai mare divizor comun al numerelor y şi r, pe care îl notăm cu d, va rezulta d|y şi d|r, unde d|qy+r=x, deci avem d|x şi d|y.
Fie acum d’$\in$ N, aşa încât d’|x şi d’|y. Obţinem d’|r, deci d’|y şi d’|r, de undew d’|d. Astfel, d este cel mai mare divizor comun al lui x şi y şi avem (x, y)=d=(y, r).
Teoremă. Fie a, b $\in$ N . Atunci există şi este unic cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.
Demonstraţie. Dacă a=b=0, atunci cel mai mare divizor comun este 0. Presupunem, în continuare, b≠ 0. Procedeul de determinare pe care-l vom folosi poartă numele de Algoritmul lui Euclid.

C.m.m.m.c

Definiţie. Numărul întreg m este cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al numerelor întregi a şi b (notăm m=[a, b]) dacă satisface condiţiile:
a | m şi b | m;
pentru orice întreg μ, pentru care a | μ si b | μ, rezultă m | μ.
Teoremă. Pentru orice a, b $\in$ N există su este unic cel mai mic multiplu comun al lor.

Demonstraţie.Dacă a=0 sau b=0,atunci singurul multiplu a lui a şi b este 0.
Presupunem în continuare că $a\neq0$ şi $b\neq0$, prin urmare 0 nu divide ab, deci 0 nu satisface condiţiile de a fi cel mai mic multiplu comun pentru a şi b.
Considerăm mulţimea: $M_{a,b}=\{m' \in N^* \mid a|m' \text{ şi } b|m'\}$.
Din faptul că $ab \in M_{a,b}$:$m \leq m'$, oricare ar fi $m' \in M_{a,b}$.
Vom arăta că m=[a,b].
Din $m\in M_{a,b}$ rezultă a|m şi b|m.
Aplicăm teorema împărţirii cu rest pentru m' şi m. Rezultă că există q, r aşa încât m'=mq+r, $0\leq r<m$. Să presupunem acum că $r\neq0$. Din a|m. A|m' şi m'=mq+r rezultă că a|r. Analog din b | m şi b | m' rezultă că b|r. Aşadar, $r\in M_{a,b}$ şi cum $m\leq m'$, oricare ar fi $m' \in M_{a,b}$, obţinem că $m\leq r$, ceea ce este fals.
Prin urmare, r=0, de unde m|m' şi cu aceasta am verificat faptul că m=[a, b].
Mai rămâne de arătat unicitatea lui m.
Presupunem că există $m_1\in N$, astfel încât dă fie satisfăcute condiţiile:
$a|m_1$, $b|m_1$
oricare $m_2\in N$: $a|m_2$, $b|m_2 \Rightarrow m_1|m_2$.
Rezultă atunci că $m_1 |m$ şi $m|m_1$ deci $m=m_1$.

Algoritmul lui Euclid

Definiţie. Algoritmul lui Euclid al numerelor a şi b cu a>b, este tabloul de relaţii:

$a=bq_1 + r_1$ unde $0<r_1<b$;
$b=r_1q_1 + r_2$ unde $0<r_2<r_1$;
$r_1=r_2q_3 + r_3$ unde $0<r_3<r_2$;
....
$r_{n-2}= r_{n-1}q_n + r_n$ unde $0<r_n<r_{n-1}$;
$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$ unde $r_{n+1}=0$
sau relaţia a=bq, dacă b | a.
Algoritmul lui Euclid există şi este finit.
Ultimul rest nenul din algoritm dă c.m.m.d.c. al numerelor a şi b adică
$r_n = (a, b)$. Dacă b | a, atunci (a, b) =b.
Proprietăţi ale c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c.:

(a,a) = a , [a, a] = a (idempotenţă);
(a, b) = (b, a) [a, b] = [b, a] (comutativitate);
(a, (b, c)) = ((a, b), c), [a, [b, c]] = [[a, b], c] (asociativitate);
(a, [a, b]) = a, [a, (a, b)] = a (absorbţie),
adică mulţimea numerelor întregi formează o latice în raport cu c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. considerate ca operaţii binare.
Pentru orice pereche a, b de numere întregi $[a,b]\cdot(a,b)=ab.$ (1)
Definiţie. Numerele întregi a, b, se numesc prime între ele sau relativ prime dacă (a, b) = 1.
Teoremă fundamentală. Dacă a | bc şi (a, b =1, atunci a | c.
Dacă a | c, b | c şi (a, b) = 1, atunci ab | c.

Proprietatea de distributivitate:

(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)] şi [a, (b, c)] = ([a, b)], [a, c]).

Pentru orice întreg k $(ka_1, ka_2, ..., ka_n) = k\,(a_1, a_2, ..., a_n)$ şi
$[ka_1, ka_2, ... , ka_n] = k\,[a_1, a_2, ..., a_n]$. (2)

C.m.m.d.c. al numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$ este o combinaţie liniară a acestor numere cu coeficienţi întregi, adică există numerele întregi $u_1, u_2, ..., u_n$ astfel ca : $(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n$.

Definiţie. Numerele întregi $a_1, a_2, ..., a_n$ se numesc prime între ele dacă $(a_1, a_2, ..., a_n)=1$.
Teoremă. Condiţia necesară şi suficientă ca numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ să fie prime între ele este ca să existe numerele întregi $u_1, u_2, ..., u_n$ astfel ca $a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n = 1$.
Datorită asociativităţii, c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. se pot calcula prin recurenţă.
Pentru n numere întregi $a_1, a_2, ..., a_n$ proprietatea (1) devine
$[a_1, a_2, ..., a_n] \cdot (A_1, A_2, ..., A_n) = a_1a_2, ...a_n$,
$[A_1, A_2, ..., A_n] \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = a_1a_2, ...a_n$,
unde $a_1a_2 ...,a_n = a_1A_1=a_2A_2=...=a_nA_n$.
În baza proprietăţii (2), c.m.m.d.c. se obţine luând produsul factorilor comuni din descompunerea canonică, cu exponenţii cei mai mici, iar c.m.m.m.c. se obţine luând produsul tuturor factorilor cu exponenţii cei mai mari.
Ecuaţia $x^2+y^2=z^2$ are, în numerele întregi, o soluţie x=mab,

$$y = m\frac{a^2-b^2}{2} \quad z = m\frac{a^2+b^2}{2}$$

Cu m întreg arbitrar, a şi b primi între ei, impari, sau, altfel scrise, $x = m(p^2-q^2)$, $y = 2mpq$, $z = m(p^2+q^2)$, cu p şi q primi între ei, de paritate diferită.

Teorema lui Bèzout

Definiţie: dacă d=(a,b) $\ni$ k,l $\in$ Z: $d=k\cdot a+l\cdot b$.
Demonstraţie: Definim $r_0=a$, $r_1=b$, $n\geq1$, r_{n+1} este restul împărţirii lui r_{n-1} la r_n $(r_n\neq0)$.
Demonstrăm prin inducţie după n.
$\forall$ n $\in$ N $\ni$ $\alpha_n ,\beta_n \in N : r_n= \alpha_n\cdot a+\beta_n\cdot b$
Folosim varianta de inducţie
P(0) şi P(1)
P(n) şi P(n-1) ==> P(n+1)
$\forall$ n P(n)
1)Arătăm că P(0) şi P(1) sunt adevărate
$r_0=a=1\cdot a+0\cdot b$ $(\alpha_0=1,\beta_0=0)$
$r_1=b=0\cdot a+1\cdot b$ $(\alpha_1=0,\beta_1=0)$
2)Presupunem $r_{n-1}= \alpha_{n-1}\cdot a+\beta_{n-1}\cdot b$
$r_n= \alpha_n\cdot a+\beta_n\cdot b$
Arătăm că $\ni$ α_n,β_n $\in$: $r_{n+1}= \alpha_{n+1}\cdot a+\beta_{n+1}\cdot b$

Din Teorema Împărţirii cu rest (T.I.R.) ==> $r_{n-1}= q_n \cdot r_n+r_{n+1}$
==> $r_{n+1}=r_{n-1}-q_n \cdot r_n$
$r_{n+1}=\alpha_{n-1} \cdot a+\beta_{n-1} \cdot b-(\alpha_n \cdot a+\beta_n \cdot b) \cdot q_n=(\alpha_{n-1}-q_n \cdot \alpha_n) \cdot a+(\beta_{n-1}- \beta_n \cdot q_n) \cdot b$
$r_{n+1}=\alpha_{n+1} \cdot a+\beta_{n+1} \cdot b$ unde $\alpha_{n+1}=\alpha_{n-1}-q_n \cdot \alpha_n$
$\beta_{n+1}=\beta_{n-1}-a_n \cdot \beta_n$
Din 1) şi 2) ==> P(n) adevarată $\forall$ n $\in$ N
Observaţie: din această demonstraţie a teoremei lui Bezout obţinem şi un algoritm de aflare a numerelor k şi l din scrierea $d=k \cdot a+l \cdot b$
Vom considera tabelul următor unde $a \geq b$:

- q	k l 1 0 0 1	a= b=
- q	1 -q	r
- q_1	$-q_1$ $q \cdot q_1+1$	$-q_1 \cdot r+b=r_1$
……….	……………….	…………..

Algoritmul este:
împărţim pe a la b şi obţinem restul r, q-câtul împărţitii lui a la b
$-q \cdot b+a=r$
împărţim pe b la r si obţinem restul r_1,q_1-câtul împărţirii lui b la r
continuăm până obţinem r=0
ultimul rest nenul este d, iar numerele din tabel de pe coloanele k şi l corespunzătoare acestui rest nenul sunt cele căutate
Exemplu:
Să se calculeze (250,48) şi să se scrie sub forma $d=250 \cdot k+48 \cdot l$, k,l $\in$ Z
Rezolvare:

-q	k l 0 0 1	250 48
-5	1 -5	10
-4	-4 21	8
-1	5 -26	2
-4	-24 125	0

Ultimul rest nenul este 2 ==> (250,48)=2
==> $2=250 \cdot 5-26 \cdot 48$

Consecinţe ale teoremei lui Bèzout

Dacă d=(a,b) ==> $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$
Dacă împărţim două numere cu c.m.m.d.c. al lor se obţin numere prime între ele .(deci două numere a şi b sunt prime între ele dacă c.m.m.d.c. al lor este
1) Dacă $m \mid a \cdot b$ şi (m,a)=1 ==> $m \mid b$ (Lema lui Gauss)
(Lema lui Gauss2) dacă p-prim şi $p \mid a \cdot b$ ==> $p \mid a$ sau $p \mid b$.
Dacă (m,a)=1, (m,b)=1 ==> $(m,a \cdot b)=1$

Dacă (a,b)’d, iar k є N^* ==> (k· a,k· b)=k· d
Demonstraţie:

d=(a,b) ==> ∍ k,l є Z: d=k· a+l· b | :d ==> 1= $\frac{ka}{d}+\frac{lb}{d}$

Fie s un divizor comun al numerelor $\frac{a}{d}$ şi $\frac{b}{d}$

==> s | $\frac{a}{d}$ şi s | $\frac{b}{d}$ ==> s | $\frac{ka}{d}$ şi s | $\frac{lb}{d}$ ==> s | $\frac{ka}{d}+\frac{lb}{d}$

==> s este un divizor natural al numerelor

2) (m,a)=1 ==> ∍ k,l є Z: 1=k· m+l· a | b

==> k· m· b+l· a· b=b ==> bⱮm Q.E.D.

Ɱ m Ɱm

Pentru a demonstra **3)** o reformulăm sub forma:
Fie p=prim şi p | a· b. Dacă p nu divide a atunci p | b
Din 2) ==> p | a· b, p nu divide a ==> (p,a)=1 (p=prim) ==> p | b
4) (m,a)=1 ==> k,l є Z: 1=k•m+l•a
(m,b)=1 ==> x,y є Z: 1=x•m+y•b ==> 1-km=l•a
1-xm=y•b
==>(1-k•m)(1-x•m)=l•y•a•b
1-(k+x)m+k•x•m2 =l•y•a•b
1=(k+x-k•xm)m+l•y•a•b
Notăm k+x-kxm=k•1
l•y=l1
==> k1m+l1a•b=1
==> (m,a•b)=1

5) (a,b)=1 ==> x,y є Z: d=x•a+y•b ¦•k
==> x•k•a+y•k•b=k•d
==> (k•a,k•b)=k•d

Aplicaţii

1. Să se determine numerele naturale a, b, c pentru care: (a,b,c)=6, [a,b,c]=1440, a+b+c=234.
Rezolvare:
(a,b,c)=6 ==> a=6α
b=6β
c=6γ
==> α+β+γ=39
[a,b,c]=[6^{α},6β,6γ]=1440= $2^4 3^2 5$
==> [α,β,γ]= $2^4 3\cdot 5$
Presupunem α= 2^4 k=16k
α < 39 ==> 16k<39

[α,β,γ]= $2^4 3^2 5 = 2^{\max(x1,y1,z1)} 3^{\max(x2,y2,z2)} 5^{\max(x3,y3,z3)}$ ==> k-impar
==> k=1 ==> α=16
β+γ=23
3·5|α·β·γ
==> β=20 β=15 β=18
γ=3 γ=8 γ=5
ultima soluţie nu convine din definiţia cmmmc.
S={(16,20,3),(16,15,8)} şi permutările lor.

2. Dacă a şi n sunt numere naturale, să se calculeze

$$\left(a^{2n^2+3n-1}-1, a^{n^2+3n+2}+1\right)$$

Rezolvare:
Fie
d= $\left(a^{2n^2+3n-1}-1, a^{n^2+3n+2}+1\right)$
==> $a^{(n+1)(2n+2)}$ -1=dα ==> $a^{(n+1)(2n+2)}$ =dα+1 $\uparrow^{(n+2)}$
$a^{(n+1)(n+2)}$ +1=dβ $a^{(n+1)(n+2)}$ =dβ-1 $\uparrow^{(2n+1)}$

==> $a^{(n+1)(2n+2)(n+2)}$ = (dα+1) $^{(n+2)}$
$a^{(n+1)(2n+2)(n+2)}$ = (dα-1) $^{(2n+1)}$

==> (dα+1) $^{(n+2)}$ =(dα-1) $^{(2n+1)}$
μd+1=μd-1
==> μd=2 ==> d|2 ==> d є {1,2}
==> Dacă a este par d=1
Dacă a este impar d=2

3. Pentru m şi n numere naturale, să se arate că: (2^m -1, 2^n -1)= $2^{(m,n)}$ - 1
Rezolvare:
Fie (m,n)=d
m=αd
n=βd
Demonstrăm că: ($2^{\propto d}$ -1, $2^{\beta d}$ -1)= 2^d - 1
$2^{\propto d}$ -1= $(2^d)^\alpha$ -1=(2^d - 1)($(2^d)^{\alpha-1}+(2^d)^{\alpha-2}+......+1$)
$2^{\beta d}$ -1= $(2^d)^\beta$ -1=(2^d - 1)($(2^d)^{\beta-1}+(2^d)^{\beta-2}+.....+1)$
Am demonstrat că :(2^d - 1) |($2^{\propto d}$ -1, $2^{\beta d}$ -1)
Arătăm că oricare alt divizor al ($2^{\propto d}$ -1, $2^{\beta d}$ -1) este un divizor al lui (2^d - 1)

Din teorema lui Bezout rezultă că există: k,l ϵZ a.i: $d=k\cdot m+l\cdot n$

Not (2^m -1, 2^n -1)=D

==> 2^m =D· x+1 ==> $(2^m)^k$ =(D· x+1)^k =μD+1

2^n =D· y+1 ==> $(2^n)^l$ =(D· y+1)^l =μD+1

==> $(2^m)^k \cdot (2^n)^l = 2^{mk+ln} = 2^d$ =(μD+1)(μD+1)=μD+1

==>D | 2^d -1

==>(2^m -1, 2^n -1)= $2^{(m,n)}$ - 1 Q.E.D.

4.Fie $A_n = n^9$ - n . Să se afle cmmdc al numerelor A_1, A_2, A_3, ..., A_{2005}

Rezolvare:

Fie (A_1, A_2, A_3, ..., A_{2005})=d

$A_n = n(n^4-1)(n^4+1) = n(n^4+1)(n^2+1)(n^2-1) = n(n^4+1)(n^2+1)(n+1)(n-1)$

$A_1=0$;

$A_2=2\cdot 17\cdot 5\cdot 3\cdot 1=30\cdot 17$

$A_3=3\cdot 7\cdot 40\cdot 10\cdot 4\cdot 2$

$A_4=4\cdot 257\cdot 17\cdot 5\cdot 3$

Se observă că A_3 nu se divide cu 17

Arătăm ca A_n se divide cu 5:

Folosim teorema lui Fermat: dacă p=prim, a ϵ **Z**, p nu divide a, atunci

p | a^{p-1}-1

==> 5 | n^4-1 dc n ϵ Z si 5 nu divide pe n

==> 5 | n(n^4-1) pentru orice n ϵ Z

==> 5 | A_n

Arătăm că 6 divide pe A_n :

6 | (n-1)n(n+1) pentru orice n ϵ Z

==> 6 | A_n

==> 30 | A_n

==> (A_1, A_2, A_3, ..., A_{2005})=30

5.Fie $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ .Să se afle cmmdc al numerelor A_0,A_1,A_2,..., A_{2005}

Rezolvare:

Fie: (A_0,A_1,A_2,..., A_{2005})=d

$A_0=1+9+25=35=5\cdot 7$

$A_1=8+3^8+5^8=8+739\cdot 739+5^8$=……9+…..5=……4

==> A_1 nu se divide cu 5

Arătăm că A_n se divide cu 7:

$A_n = 2^{3n}+9\cdot 3^{6n}+25\cdot 5^{6n} = 8^n+9\cdot 27^{2n}+25\cdot 125^{2n} = (7+1)^n+9(\mu 7-1)^{2n}+25(\mu 7-1)^{2n}$

$A_n = \mu 7+1+\mu 7+9+\mu 7+25 = \mu 7+35 = \mu 7$

==>7 | A_n

==> (A_0,A_1,A_2,..., A_{2005})=5

6. Se consideră şirul de numere naturale nenule $(a_n)_{n}\geq 1$,
$a_{n+1}=a_n+(a_n,a_{n-1})$ pentru orice $n\geq 2$. Să se determine termenul general.
Rezolvare:
Fie $(a_1,a_2)=d$
$a_1=\alpha d$
$a_2=\beta d$
$a_3=a_2+(a_1,a_2)=a_2+d=\beta d+d=(\beta+1)d$
$a_4=a_3+(a_2,a_3)=(\beta+1)d+(\beta d,(\beta+1)d)=(\beta+1)d+d=(\beta+2)d$
$a_5=a_4+(a_3,a_4)=(\beta+2)d+((\beta+1)d,(\beta+2)d)=(\beta+2)d+d=(\beta+3)d$
Folosim următoarea inducţie:
P(0),P(1)
$(\forall k)$ P(k),P(k+1)==>P(k+2)
$(\forall n)$ P(n)
În cazul nostru P(0) este reprezentat de propoziţia a_2 , iar P(2) este reprezentat de a_3 care sunt adevarate
Presupunem $a_k=(\beta+k-2)d$
$a_{k+1}=(\beta+k-1)d$
Arătăm ca a_{k+2} este adevarată:
$a_{k+2}=a_{k+1}+(a_k,a_{k+1})=(\beta+k-1)\cdot d+((\beta+k-1)\cdot d,(\beta+k-2)\cdot d)$
$a_{k+2}=(\beta+k-1)\cdot d+d=(\beta+k)\cdot d$
==>$(\forall n)$ $a_n=d(\beta+n-2)=d\cdot\beta+(n-2)\cdot d=a_2+(n-2)(a_1,a_2)$ Q.E.D.

7.Se considera şirul de numere naturale şi d = (a,n). să se arate că dintre elementele mulţimii $A=\{ak|\ a\leq k\ \leq n\}$ exact d se divid cu n.
Rezolvare:
Din (a,n)=d rezultă că a şi n sunt de forma:
$a=\alpha d$
$n=md$
Fie ak un element al mulţimii A care se divide cu n
==> $\frac{a\cdot k}{n}=\frac{\alpha\cdot d\cdot k}{m\cdot d}=\frac{\alpha\cdot k}{m}$
cum $n\,|\,a\cdot k$ ==> $m\,|\,\alpha\cdot k$
dar $(m,\alpha)=1$ ==> $m\,|\,k$ ==> $k=m\cdot t$
dar $1\leq k\leq n$==> $1\leq k\leq m\cdot d$ ==> $t\in\{1,2,..,d\}$
7. a, b –consecutive => b=a+1 => (a,b)=(a, a+1)=1
(a,b)[a,b] = ab => [a,b] = ab
$a^2+b^2=n[a,b]+(a,b)$
$a^2+(a+1)^2=nab+1$
$a^2+(a+1)^2=na(a+1)+1$
$a^2+a^2+2a+1=na^2+na+1$
$2a^2+2a+1-na^2-na-1=0$
$2a^2-na^2+2a-na=0$
$a^2(2-n)+a(2-n)=0$
$(2-n)(a^2+a)=0$
a(a+1)(2-n)=0 => 2-n=0 => n=2

reciproc dacă n=2 notăm $(a,b)=d \Rightarrow a=d\alpha$
$b=d\beta$
$(\alpha,\beta)=1$
$(a,b)[a,b]=ab$
$d[a,b] = d\alpha d\beta \Rightarrow [a,b] = d\alpha\beta$
$d^2\beta^2+d^2\beta^2 = 2d\alpha\beta+d$

$d(\alpha^2+\beta^2)=d(2\alpha\beta+1) \Rightarrow d(\alpha^2+\beta^2) = 2\alpha\beta+1 \Rightarrow$ $d = \dfrac{2\alpha\beta+1}{\alpha^2+\beta^2} \geq 1$ $\Rightarrow (\alpha-\beta)^2 \leq 1$

Dacă $\alpha=\beta \Rightarrow$ $d = \dfrac{2\alpha\beta+1}{\alpha^2+\beta} = \dfrac{2\alpha^2+1}{2\alpha^2} = 1+\dfrac{1}{2\alpha^2} \in M$ $\Rightarrow \alpha-\beta = \pm 1$ şi $d = 1 \Rightarrow d(\alpha-d\beta) = \pm 1 \Rightarrow$
$a-b = \pm 1 \Rightarrow a,b$ consecutive.