ACADEMIA FORTELOR TERESTRE
„NICOLAE BALCESCU”
-SIBIU-

REFERAT :

SERII FURIER

SERII FOURIER

Funcţiile periodice constituie una din clasele de funcţii care datorită proprietăţilor lor intervin în diverse probleme teoretice şi practice.Un exemplu de reprezentări şi studiu al acestor funcţii îl constituie dezvoltarea în serie Fourier.În mai multe cazuri dezvoltarea unei funcţii în serie Fourier este mai convenabilă decât dezvoltarea în serie Taylor.Aceasta evident şi din considerente că pentru dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii se cere ca funcţia să fie indefinit derivabilă lucru care nu se cere în cazul seriilor Fourier.Pe de altă parte termenii unei serii Fourier sunt funcţii periodice cu care putem descrie fenomenele oscilatorii. O altă calitte a seriilor Fourier este şi aceea că termenii săi au proprietatea de ortogonalitate . Între dificultăţile ce se întâlnesc în studiul seriilor Fourier este aceea că seria Fourier asociată unei funcţii periodice nu converge întotdeauna către funcţia periodică respectivă.

Definiţie.Coeficienţi Fourier.

Definiţia 1

Se numeşte serie trigonometrica, o serie de forma:

$$\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}[\, a_k\cos kx+b_k\sin kx] \qquad \text{(II 1)}$$

unde a_0,a_k,b_k sunt numere reale, independente de valorile variabilei x.

Fie f(x) o funcţie integrabilă de perioadă 2π.Să presupunem că:

1°. funcţia f(x) poate fi reprezentată printr-o serie trigonometrică

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[\, a_k\cos kx+b_k\sin kx] \qquad \text{(II 2)}$$

2°. seria (II-2) poate fi integrată termen cu termen după înmulţirea ei cu cos·n·x şi sinx, atunci, deoarece:

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \neq k \\ \pi, dacă n \neq k \end{cases} \qquad \text{(II 3)}$$

şi $\int_0^{2\pi} \cos kx \sin nx dx = 0$ (II 4)

avem: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a0 dx + \sum_{k B1}^{\infty} \left[a_k \int_0^{2\pi} \cos kx dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin kx dx \right]$

Deasemeni, deoarece $\int_0^{2\pi} \sin kx dx = \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = 0$ (II 5)

rezultă $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ (II 6)

Analog

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{2} a_0 \int_0^{2\pi} \cos nx dx + \sum_{k B1}^{\infty} \left[a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx \right]$$

Dar conform relatiilor (II 3), (II 4), (II 5), avem:

$\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = 0$. $\sum_{k B1}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = a_n \pi$

deci: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$ (II 6`)

De asemenea, înmulţind dezvoltarea(II-2) cu sin nx dx şi integrând între 0 şi 2π, obţinem analog $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$ (II 7)

Definiţia 2

Coeficienţii a_n şi b_n sau a_k şi b_k se numesc coeficienţi Fourier, iar dezvoltarea (II-2) serie Fourier

OBSERVAŢIE

Deoarece integrala unei funcţii periodice de perioadă 2π este aceeaşi pe orice interval de lungime 2π, între integralele care dau a_0, a_k şi b_k, pot fi scrise:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad \text{(II 8)}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

Seriile Fourier a unei funcţii pare şi a unei impare

1°. Fie f(x) o funcţie de variabilă reală, pară, periodică de perioadă 2π. Avem :

$$f(-x)=f(x) \qquad \text{(II 9)}$$

Dar $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ facem în prima integrală x=-u şi obţinem $\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} f(-u)(-du)$ deoarece limita de integrare se schimbă.

Deci $\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{\pi}^{0} f(-u)\,du = \int_{0}^{\pi} f(-u)du$

sau $\int_{0}^{\pi} f(u)du = \int_{0}^{\pi} f(-x)\,dx = \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

Deci $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad \text{(II 10)}$

Avem însă $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

Facem în prima integrală x=-u şi obţinem

$$1 = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx = \int_{\pi}^{0} f(-u)\cos(-nu)d(-u) = -\int_{\pi}^{0} f(-u)\cos(-nu)du = \int_{0}^{\pi} f(-u)\cos(-nu)du$$

Cum cos u este de asemeni o funcţie pară, atunci

$$I_1 = \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

deci: $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$ (II 11)

De asemeni, ţinănd seama de formula (II-7) avem: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ f(x)sinx dx=$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}$ f(-u) sin(-nu) d(-u) = -$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}$ f(-u)(-sinnu) du=$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}$ f(u) sin nu du =

-$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ f(x) sin nx dx=-b_n

(pentru că sinusul este o funcţie impară) sau $2b_n=0$ sau $b_n=0$ (II 12)

Deci o o funcţie pară are seria Fourier:

$$\frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{\infty} ak\cos kx \qquad \text{(II 13)}$$

Unde a_0 şi a_k sunt daţi de formulele (II-10) şi (II-11).

2° Fie acum f(x) o funcţie reală, impară,periodică de perioadă 2π.

Avem : f(-x)=-f(x)

dar $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ f(x) dx cu x=-u

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f$(-u) d(-u)=-$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}$ f(u) d(-u)=$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}$ f(u) d(u)=-$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$ f(x) d(x) =a_0

deci

$a_0=0$ (II 14)

analog obţinem

$a_n=0$ (II 15)

şi $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$ (II 16)

deci seria Fourier a unei funcţii impare este

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \qquad \text{(II 16`)}$$

Seria Fourier unei funcţii periodice de perioadă T

Am studiat până acum funcţiile cu perioadă 2π.În aplicaţii intervin adesea fenomene periodice reprezentate prin funcţii periodice cu perioada oarecare T.

f(x+T)=f(x)

Prin schimbare de variabilă $x = \frac{T}{2\pi}\xi = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{-1} 1 \quad \xi = \frac{\xi}{\omega}; \ \omega = \frac{2\pi}{T}; \ \xi = \omega x$

obţinem $f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right) = F(\xi)$ unde F(ξ) este o funcţie periodică 2π. Într-adevăr avem

$$F(\xi) = F(\xi + 2\pi) = f\left[\frac{T}{2\pi}(\xi + 2\pi)\right] = f\left(\frac{T}{2\pi}\xi + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right)$$

Deci toate rezultatele obţinute pentru funcţiile periodice cu perioada 2π rămân adevărate pentru funcţiile periodice cu perioadă oarecare.
Să stabilim forma seriei Fourier şi expresia coeficienţilor în cazul când perioada este T.
Ţinând seama de schimbare de variabilă făcută pentru funcţia F(ξ) putem scrie:

$$F(\xi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos \xi k + b_k \sin \xi k\right] \qquad \text{(II 24)}$$

cu $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)d\xi$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\cos k\xi d\xi \qquad \text{(II 25)}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\sin k\xi d\xi$$

sau revenind la variabila x

$$F\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\right] \qquad \text{(II 26)}$$

unde am notat $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Pentru a calcula coeficienţii seriei în integralele care intervin, efectuăm schimbarea de variabilă:

$$\xi = \frac{2\pi}{T}x \qquad d\xi = \frac{2\pi}{T}$$

Pentru limitele de integrare $\xi = 0 \Rightarrow x = 0$ şi $\xi = 2\pi \Rightarrow x = T$
obţinem:

$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}\int_0^T F\left(\frac{2\pi}{T}x\right)dx=\frac{2\pi}{T}\int_0^T f(x)dx$

$$a_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos k\omega x dx \qquad \text{(II 27)}$$

$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin k\omega x dx$

Dacă f(x) este o funcţie pară, obţinem în acelaşi mod $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\omega x$

cu $b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin k\omega x dx$

Convergenţa seriilor Fourier

Referitor la condiţiile în care seria Fourier a unei funcţii f(t), este convergentă şi suma sa este f(t), vom da fără demonstraţie o teoremă care conţine condiţii suficiente, destul de cuprinzătoare pentru funcţiile întâlnite în aplicaţii.

Fie f(t) o funcţie definită pe un interval [a,b] exceptând eventual un număr finit de puncte din acest interval.

Definiţie. Se spune că f(t) satisface condiţiile lui Diriclet pe intervalul [a,b] dacă:

a) f(t) este mărginită şi are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate în [a,b].
b) Intervalul [a,b] poate fi împărţit într-un număr finit de subintervale, astfel încât pe fiecare subinterval f(t) să fie monotonă.

Teoremă

Dacă funcţia f(t) , periodică de perioadă T, satisface condiţiile lui Dirichlet pe un interval [α ,α+T] seria sa Fourier este convergentă pentru orice t.

Suma S(t) a seriei Fourier este egală cu f(t) în toate punctele în care f(t) este continuă.

Într-un punct de discontinuitate *c*, S(c) este egală cu media aritmetică a celor două limite laterale ale funcţiei f(t) în punctul c.

$$S(c)=\frac{1}{2}\left[f(c-0)+f(c+0)\right] \qquad \text{(II 55)}$$

Teorema prezentată mai sus se mai numşte şi teorema lui Dirichlet şi constituie un criteriu de o largă aplicabilitate referitoare la posibilitatea de a prezenta o funcţie prin seria sa Fourier, sau cum se mai spune deseori de a dezvolta o funcţie în serie Fourier.

Aplicaţii ale dezvoltării în serie Fourier la diferite funcţii

1° Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică f(x) de perioadă 2π definită astfel: f(x)=x $-\pi\le x\le \pi$

Soluţie. Această funcţie este monotonă şi mărginită pe intervalele de periodicitate. Îndeplineşte deci condiţia lui Dirichlet şi păoate dezvoltată în serie Fourier.
Utilizând formulele (II-8) vom găsi uşor coeficienţii a_k,a_0 şi b_k.
Dar se observă că f(x) este o funcţie impară f(x)=-f(x) atunci $a_0=a_k=0$ şi numai $b_k\neq 0$. Avem deci:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx dx=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx$$

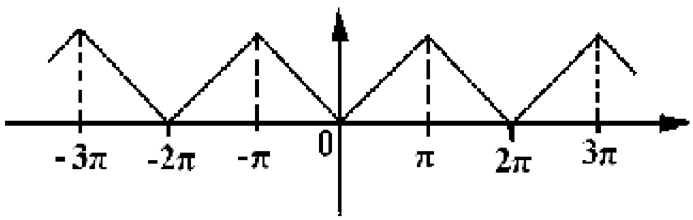
deci : $b_k=(-1)^{k+1}\cdot\frac{2}{k}$

Se obţine deci:

$$f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}=.........(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}+......\right]$$

Această egalitate are loc peste tot mai puţin în punctele de discontinuitate. În aceste puncte, suma seriei este egală cu media aritmetică a limitelor funcţiilor la dreapta şi la stânga, adică zero.

2°. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică f(x) de perioadă 2π definită astfel:
f(x)=-x pentru $-\pi\le x\le 0$
f(x)= x pentru $0<x\le\pi$
adică f(x)= x



<u>Soluţie</u>. Funcţia f(x) îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet. Coeficienţii seriei Fourier sunt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos xdx\right] = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos xkxdx + \int_{0}^{\pi} x\cos kxdx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin xkx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\mathrm{k}}\int_{-\pi}^{0}\sin kxdx + \frac{x\sin xkx}{k}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\mathrm{sinkxdx}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi \mathrm{k}^2}(\cos \mathrm{k}\,\pi - 1) = \begin{cases} 0 \text{ pentru k par} \\ -\dfrac{4}{\pi\,\mathrm{k}^2} \text{ pentru k impar} \end{cases}$$

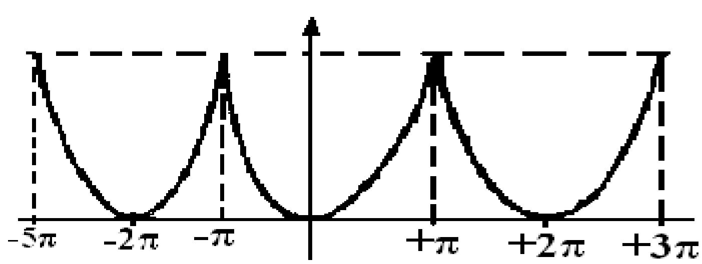
$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kxdx + \int_{0}^{\pi} x\sin kxdx\right] = 0$$

Seria Fourier este deci:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\ldots\ldots.. + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\ldots.\right]$$

Această serie converge peste tot şi suma sa este egală cu funcţia propusă.

3°. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia f(x) de perioadă 2π definită astfel:
$f(x)=x^2$ pentru $-\pi \le x \le \pi$



<u>Soluţie</u> : Calculăm coeficienţii seriei Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}\,|$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx\right] = -\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx\right]$$

$$= \frac{4}{\pi k^2}(\pi \cos k\pi) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi \mathrm{k}^2} \text{ pentru k par} \\ -\dfrac{4}{\pi\ \mathrm{k}^2} \text{ pentru k impar} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2 \cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx\right] = -\frac{2}{\pi k}\left[\frac{x \sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \sin kx dx\right] = 0$$

Deci seria Fourier a funcţiei date se scrie:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} ....\right)$$

Concluzii :

Consider ca prin relizarea acestui referat am reusit sa surprind cat mai multe lucruri legate de seriile furier, de dezvltarea in serie furier, de cocergenta seriior furier dar nu in ulimul rand am incercat sa redau cateva apicatii ale acestor serii furier.