CAP VII
ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR ŞI STATISTICĂ MATEMATICĂ

1.Eveniment aleator. Frecvenţa relativă a unui eveniment aleator. Probabilitatea unui eveniment. Obiectivul teoriei probabilităţilor.

Noţiunea fundamentală a teoriei probabilităţilor este aceea de eveniment aleator.

Se numeşte *eveniment aleator*, un eveniment care în anumite condiţii poate fie să se realizeze, fie să nu se realizeze.

Exemplul 1. Apariţia unei feţe sau a alteia a unei monede aruncate este un eveniment aleator.

Exemplul 2. Lovirea obiectivului vizat în cursul unui tir este un eveniment aleator.

Exemplul 3. La fabricarea unui cilindru cu un diametru de 26 cm, faptul comiterii unei avarii inferioare a 0,2 mm, cu mijloacele de producţie de care dispune este un fenomen aleator.

Definiţie 1. Se numeşte *frecvenţa relativă* ***p*** a unui eveniment aleator ***A*** raportul numărului de realizare a acestui eveniment $\boldsymbol{m^*}$ şi numărul total de încercări identice $\boldsymbol{n^*}$ în care evenimentul dat ar fi putut sau nu să se producă.

Vom scrie :

$$P^* (A) = p^* = \frac{m^*}{n^*} \qquad \textbf{(VII 1)}$$

Din observarea diferitelor fenomene, rezultă că dacă numărul de încercări (probe) din fiecare serie este practic, puţin ridicat, frecvenţa relativă de apariţie a evenimentului ***A*** în fiecare serie poate diferi, apreciabil de la o serie la alta.

Dacă în schimb, numărul de încercări dintr-o serie este ridicat, atunci, de regula, frecvenţa relativă de apariţie a evenimentului ***A*** în fiecare serie poate diferi puţin de la o serie la alta şi diferenţa aceasta este cu atât mai mică cu cât numărul de încercări dintr-o serie este mai mare. Se spune deci că pentru un număr mare de încercări dintr-o serie, frecvenţa relativă prezintă, din ce în ce mai puţin, un caracter aleator. Notăm de asemenea că există evenimente cu frecvenţa instabilă, astfel încât, valorile lor, chiar pentru o foarte mare serie, pot foarte mult sa difere una de alta.

Experienţa arată că în marea majoritate a cazurilor, există un număr constant ***p*** astfel încât frecvenţa relativă a realizării evenimentului ***A*** pentru un număr mare de încercări repetate diferă foarte puţin, câteva cazuri rare sunt exceptate, de acest număr ***p***.

Acest fapt empiric se scrie simbolic în felul următor :

$$\frac{m^*}{n^*} \xrightarrow[n^* \to \infty]{} \boldsymbol{p} \qquad \textbf{(VII 2)}$$

Numărul ***p*** se numeşte *probabilitatea* realizării evenimentului aleator ***A***. Scrierea simbolică este următoarea :

$$\boldsymbol{P(A) = p} \qquad \textbf{(VII 3)}$$

Probabilitatea ***p*** este o *caracteristică obiectivă a şanselor* de realizare a evenimentului ***A*** pentru încercările date, definită de natura evenimentului ***A***.

Frecvenţa relativă diferă puţin de probabilitatea pentru un număr mare de încercări, excepţie făcând "cazurile foarte rare" pe care le putem neglija.

Relaţia **(2)** este în mod obişnuit formulată astfel:
"Când numărul de încercări (experienţe repetate) ***n**** creşte indefinit, frecvenţa relative a evenimentului ***A*** tinde spre probabilitatea ***p*** de realizare a acestui eveniment".

Remarcă: În raţionamentele precedente noi am postulat empiric relaţia (**2**). Se pot de asemenea postula alte condiţii naturale ce decurg din experienţă. În acest caz se poate de asemenea deduce relaţia **(2)** care va fi atunci o teorema. Aceasta este teorema lui *Bernoulli*.

Probabilitatea fiind o caracteristică obiectivă a eventualităţii de realizare a unui eveniment, ea trebuie cunoscută pentru a putea prevedea natura derulării a numeroase procese pe care le considerăm în tehnică, medicină etc.

Determinarea probabilităţii de realizare a unui eveniment cu ajutorul probabilităţilor evenimentelor aleatoare condiţionând evenimentele complexe considerate, studiul legilor de probabilitate care guvernează diverse evenimente aleatoare, constituie obiectul teoriei probabilităţilor.

2. Definiţia clasică a probabilităţilor şi calcul direct al probabilităţii.

În anumite cazuri analiza încercării probei corespunzătoare, permite calcularea probabilităţii elementelor aleatoare considerate. Pentru a explica aceasta considerăm exemplele următoare.

***Exemplul 1**:* Aruncarea unui zar (cub cu şase feţe) pe care sunt notate cifrele de la 1 la 6. În virtutea simetriei celor 6 feţe, apariţia oricărui număr cuprins între 1 şi 6 are o probabilitate egală, deci se numesc *echiprobabile*. Frecvenţa relativă este $\boldsymbol{p} = \frac{1}{6}$ şi probabilitatea de apariţie în acest caz este tot de $\frac{1}{6}$. Deci probabilitatea *poate fi calculata direct*.

Definiţia 1: Se spune că evenimentele aleatoare sunt *incompatibile* pentru o încercare considerată, dacă este exclus ca în cursul acestei încercări 2 dintre ele să aibă loc simultan.

Definiţia 2: Vom spune că evenimentele aleatoare formează un sistem *exhaustiv (sau complet*) dacă în cursul fiecărei probe fiecare dintre ele poate fi realizat, excluzând realizarea tuturor celorlalte incompatibile cu ele.

Considerăm sistemul exhaustiv de evenimente aleatoare *echiprobabile şi incompatibile*. Numim aceste evenimente *cazuri sau şanse*.

Un caz al acestui sistem se numeşte favorabil realizării evenimentului $\boldsymbol{A}$ dacă apariţia acestui caz implică realizarea evenimentului $\boldsymbol{A}$.

Exemplul 2. O urna conţine 8 bile numerotate de la 1 la 8. Bilele 1, 2, 3 sunt roşii , celelalte sunt negre. Extragerea bilei numărul 1 (sau

2 sau 3) este un eveniment favorabil apariţiei unei bile roşii. Deci putem da o definiţie conceptului de probabilitate.

Definiţia 3: Se numeşte probabilitate ***p*** a evenimentului ***A*** raportul numărului cazurilor favorabile ***m*** şi numărul total de cazuri ***n***, constituind sistemul exhaustiv de evenimente echiprobabile incompatibile sau simbolic:

$$P(A) = p = \frac{m}{n} \qquad \textbf{(VII 4)}$$

Definiţia 4: Dacă toate cele ***n*** cazuri formând un sistem exhaustiv de evenimente echiprobabile incompatibile sunt favorabile realizării unui eveniment oarecare, un astfel de eveniment se numeşte sigur. Probabilitatea unui eveniment sigur este ***p = 1***.

Un eveniment la care nici unul din cele ***n*** cazuri formând un sistem exhaustiv de evenimente echiprobabile incompatibile nu este favorabil, se numeşte eveniment imposibil. Probabilitatea sa este ***p = 0***.

Remarcă: Afirmaţiile inverse sunt de asemenea adevărate în acest caz. În alte cazuri, de exemplu în cazul unei variabile aleatoare continue, după cum vom vedea în cele ce urmează, afirmaţiile inverse pot fi false, adică dacă probabilitatea unui eveniment este egală cu 1 sau 0 nu implică în mod necesar că aceste evenimente sunt sigure sau imposibile.

Rezultă deci că probabilitatea verifică relaţia

$$0 \le p \le 1$$

Exemplul 3: Fie o carte într-un joc de 36 de cărţi. Care este probabilitatea ca ea sa fie de pică?

Soluţie: Avem aici schema cazurilor echiprobabile. Evenimentul ***A*** consta în apariţia unei cărţi de pică. Numărul total al acestui caz este ***n = 36***. Numărul de cazuri favorabile evenimentului ***A*** este ***m = 9***. Avem deci în consecinţă:

$$p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Exemplul 4: Se joacă simultan cu 2 monede. Care este probabilitatea ca să apară simultan aceeaşi faţă 1 la ambele monede?

Soluţie: Formăm tabelul:

	Prima moneda	A doua moneda
Primul caz	faţa 1	faţa 1
Al doilea caz	faţa 1	faţa 2
Al treilea caz	faţa 2	faţa 1
Al patrulea caz	faţa 2	faţa 2

Deci sunt în total patru cazuri posibile din care un singur caz este favorabil. În consecinţă, probabilitatea de a ieşi faţa 1 pe ambele piese este:

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{4}$$

Exemplul 5: Probabilitatea de a lovi un obiectiv este de 8/10 când tirul este executat cu o primă armă şi de 7/10 când se execută cu a doua armă. Să se găsească probabilitatea de a lovi obiectivul când tirul se efectuează simultan cu cele 2 arme.

Soluţie: Se poate simula această problemă astfel: Două urne conţin fiecare 10 bile numerotate de la 1 la 10. Prima urnă conţine 8 bile roşii şi 2 negre, a doua urnă conţine 7 bile roşii şi 3 negre. Care este probabilitatea ca cel puţin 2 bile extrase să fie roşii?

Cum nu are importanţă din ce urna provine bila atunci numărul de cazuri este 100 ($\boldsymbol{n}$ = 100)

Să calculăm numărul de cazuri favorabile. Atunci când se extrage fiecare din cele 8 bile roşii ale primei urne simultan cu o bilă oarecare ale celei de a doua urne, atunci printre bilele ieşite va fi cel puţin o bilă roşie. Numărul de astfel de cazuri este 10*8 = 80.

Atunci când se extrage fiecare din cele 2 bile negre din prima urnă simultan cu cele 7 bile roşii din a doua urnă găsim cel puţin o bilă roşie printre bilele ieşite. Numărul de cazuri va fi acum de 2*7 = 14. Deci numărul total de cazuri favorabile este $\boldsymbol{m}$ = 80 + 14 = 94.

Probabilitatea de a exista printre bilele ieşite, cel puţin o bila roşie este :

$$\boldsymbol{p} = \frac{m}{n} = \frac{94}{100}$$

-aceasta este precizia tirului.

Remarca 2: În acest caz noi am redus problema calculului probabilităţii tirului la problema de apariţie a uneia sau alteia din bile, când se extrage una sau alta dintre bilele unei urne. Se observă deci că problema extragerii bilelor dintr-o urnă poate fi considerată problemă generalizată.

Exemplul 6: Un lot de 100 de articole conţine 10 piese defectuoase. Care este probabilitatea pentru ca printre 4 piese alese întâmplător trei să fie fără defecte?

Soluţie: Există $\boldsymbol{n} = C_{100}^{4}$ maniere de a alege 4 piese dintr-un lot de 100. Numărul de cazuri pentru care 3 din piesele alese sa fie fără defecte este cazul
cu $\boldsymbol{m} = C_{90}^{3} * C_{10}^{1}$. Probabilitatea căutată va fi atunci:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^{3} \cdot C_{10}^{1}}{C_{100}^{4}} = \frac{1424}{4753} \approx 0{,}3$$

3. Suma probabilităţilor. Evenimente aleatoare contrare.

Definiţia 1: Se numeşte suma sau reuniunea a 2 evenimente $\boldsymbol{A_1}$ şi $\boldsymbol{A_2}$ evenimentul $\boldsymbol{C}$, constând în realizarea cel puţin a unuia din cele 2 evenimente.

Vom considera probabilităţile a două evenimente incompatibile $\boldsymbol{A_1}$ şi $\boldsymbol{A_2}$. Notăm suma acestor evenimente prin $\boldsymbol{A_1 + A_2}$ unde, avem încă: $\boldsymbol{A_1}$ sau $\boldsymbol{A_2}$; (în acest caz cuvântul „sau” nu are caracterul de excluziune, aceasta înseamnă că cel puţin unul din cele 2 evenimente se va realiza conform definiţiei 1.)

Putem enunţa astfel următoarea *teoremă de adunare a probabilităţilor*. (sau a probabilităţilor totale).

Teorema 1: Presupunem că în cursul unei probe (fenomen, experienţă), pot fi realizate un eveniment aleatoriu A_1 de probabilitate $P(A_1)$ şi un eveniment A_2 de probabilitate $P(A_2)$.

Dacă evenimentele A_1 şi A_2 sunt incompatibile atunci probabilitatea apariţie sumei acestor doua evenimente, sau a unui eveniment constând în realizarea evenimentului A_1 sau a evenimentului A_2 , se calculează cu formula:

$$P(A_1 \text{ sau } A_2) = P(A_1) + P(A_2) \qquad \textbf{(VII 5)}$$

Demonstraţie: Fie $P(A_1 \text{ sau } A_2) = A_1 \cup A_2$

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n}\ ; \quad P(A_2) = \frac{m_2}{n}$$

Evenimentele A_1 şi A_2 fiind incompatibile pentru un număr n de cazuri, numărul de cazuri favorabile realizării simultane a evenimentelor A_1 şi A_2 este egal cu 0 şi numărul de cazuri favorabile realizării fie evenimentului A_1 fie evenimentului A_2 este egal cu $m_1 + m_2$.

În consecinţă:

$$P(A_1 \text{ sau } A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

În mod analog se poate demonstra teorema pentru un număr arbitrar de tiruri:

$$P(A_1 \text{ sau } A_2 \text{ sau } \dots \text{ sau } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \qquad \textbf{(VII 6)}$$

Această ultimă egalitate se scrie:

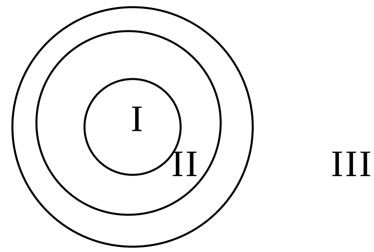
$$P\left(\sum_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1} P(A_i) \qquad \textbf{(VII 7)}$$

Exemplul 1: Se efectuează un tir asupra unui obiectiv format din 3 zone distincte. Probabilitatea de a cădea în zona a – I – a este

$\boldsymbol{P(A_1)} = \frac{5}{100}$, de a cădea în zona a – II – a este $\boldsymbol{P(A_2)} = \frac{10}{100}$ şi cea de a cădea în zona a – III – a este $\boldsymbol{P(A_3)} = \frac{17}{100}$.

Care este probabilitatea de a cădea în domeniul D ?

După formula **(6)** avem:



$$\boldsymbol{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)} =$$

$$= \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{17}{100} = \frac{32}{100} .$$

Definiţia 2: Două evenimente sunt contrarii dacă sunt incompatibile şi dacă constituie un sistem (exhaustiv).

Dacă notăm cu ***A*** unul din aceste evenimente, atunci evenimentul contrar va fi notat cu $\bar{A}$.

Presupunem că probabilitatea de realizare a unui eveniment ***A*** este ***p***, atunci putem defini probabilitatea de a nu fi realizat evenimentul ***A*** ca fiind probabilitatea de realizare a evenimentului $\bar{A}$, prin $P(\bar{A}) = q$.

Cum în timpul experienţei se va realiza în mod cert fie evenimentul ***A,*** fie evenimentul $\bar{A}$, vom obţine în virtutea teoremei enunţate:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Altfel spus suma probabilităţilor evenimentelor contrare este egală cu unitatea.

$$p + q = 1 \qquad \textbf{(VII 8)}$$

Exemplul 2: Se efectuează o anumită măsură. Notăm prin ***A*** faptul obţinerii unor erori inferioare sau egale cu λ. Fie $P(A) = p$. Evenimentul contrar, adică faptul obţinerii unor erori superioare sau egale cu λ, este evenimentul $\bar{A}$. Probabilitatea acestui eveniment este:

$$P(\bar{A}) = q = 1 - p$$

Corolarul 1. Dacă evenimentele aleatoare A_1 , A_2 , ... , A_n constituie un sistem exhaustiv de evenimente incompatibile, atunci există egalitatea:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \qquad \textbf{(VII 9)}$$

Demonstraţie: Cum evenimentele A_1 , A_2 , ... , A_n constituie un sistem exhaustiv de evenimente, realizarea unuia sau altuia din aceste evenimente este un eveniment cert.

În consecinţă:

$$P(A_1 \text{ sau } A_2 \text{ sau } \ldots \text{ sau } A_n) = 1$$

Ţinând seama de **(VII 6)** obţinem egalitatea **(VII 9)**

Definiţie 3: Evenimentele aleatoare ***A*** şi ***B*** se numesc *compatibile* dacă în cursul unei măsurători date (probe date) cele 2 evenimente pot avea loc simultan, altfel spus dacă evenimentul ***A*** şi ***B*** pot fi realizate *simultan*.

Vom nota prin (***A*** şi ***B***) sau (***AB***) evenimentul constând în realizarea simultană a evenimentelor ***A*** şi ***B***. Vom nota prin ***P(A*** şi ***B)*** probabilitatea realizării simultane a evenimentelor ***A*** şi ***B.***

Teorema 2: Probabilitatea a două evenimente compatibile este determinată de formula:

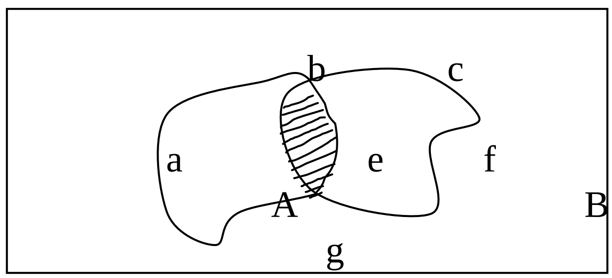
$$P(A \text{ sau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ şi } B) \qquad \textbf{(VII 10)}$$

Vom da o ilustrare geometrică a formulei **(10)**. Vom introduce mai întâi următoarea definiţie:

Definiţie 4: Fie dat un domeniu ***D*** a cărui arie este egală cu ***S.*** Considerăm domeniul ***d*** aparţinând lui ***D*** şi a cărui arie este $\bar{S}$.

Dacă faptul ca un punct să se găsească în ***D*** este un eveniment cert, probabilitatea ca punctul să se găsească în domeniul ***d*** va fi, prin definiţie, egală cu $\frac{\overline{S}}{S}$, altfel spus $\boldsymbol{p} = \frac{\overline{S}}{S}$. Această probabilitate se numeşte *probabilitate geometrică*.

Vom avea atunci, estimând pentru un punct, că faptul de a se găsi în pătratul din figură este un eveniment cert.



(D)

Rezultă deci egalitatea:

aria „abcga” = aria „abfga” + aria „bcgeb” - aria „gebfd” (VII 11)

Putem calcula, în mod analog, probabilitatea sumei unui număr oarecare de evenimente aleatoare compatibile.

4. Produsul probabilităţilor evenimentelor independente

Definiţia 1: Se spune că evenimentul ***A*** este independent de evenimentul ***B***, dacă probabilitatea de realizare a evenimentului ***B*** nu depinde de faptul că evenimentul ***A*** este produs sau nu.

Teorema: Dacă evenimentele aleatoare ***A*** şi ***B*** sunt independente, probabilitatea de realizare simultană a evenimentelor ***A*** şi ***B*** este egală cu produsul probabilităţilor de realizare a evenimentelor ***A*** şi ***B.***

$$P(A \text{ şi } B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \textbf{(VII 12)}$$

Această teoremă se mai numeşte şi *teorema de intersecţie a evenimentelor*. Şi se notează:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \textbf{(VII 12')}$$

Avem deci: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ şi

$P[A \cup (B \cap C)] = P(A \cup B) + P(A \cup C)$.

Pâna aici nu a fost definită operaţia "U"

Demonstraţie: Vom utiliza pentru demonstraţia acestei teoreme, schema urnelor. Fiecare urnă conţine respectiv n_1 şi n_2 bile. În prima urnă sunt m_1 bile roşii şi restul negre, iar în a doua urnă sunt m_2 bile roşii şi restul negre.

Se extrage o bilă din fiecare urnă. Care este probabilitatea ca cele două bile extrase sa fie roşii?

Notăm cu ***A*** evenimentul extragerii unei bile roşii din prima urnă şi cu ***B*** evenimentul extragerii unei bile roşii din a doua urnă. Avem:

$$P(A) = \frac{m_1}{n_1} \quad ; \quad P(B) = \frac{m_2}{n2}$$

Probabilitatea de a extrage o bilă din fiecare urnă este de $n_1 n_2$ ori. Numărul cazurilor favorabile de extragere a două bile roşii este $m_1 m_2$. Probabilitatea de realizare simultană a evenimentelor ***A*** şi ***B*** este:

$$P(A \text{ şi } B) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n2} = P(A) \cdot P(B) \qquad \textbf{(VII 13)}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

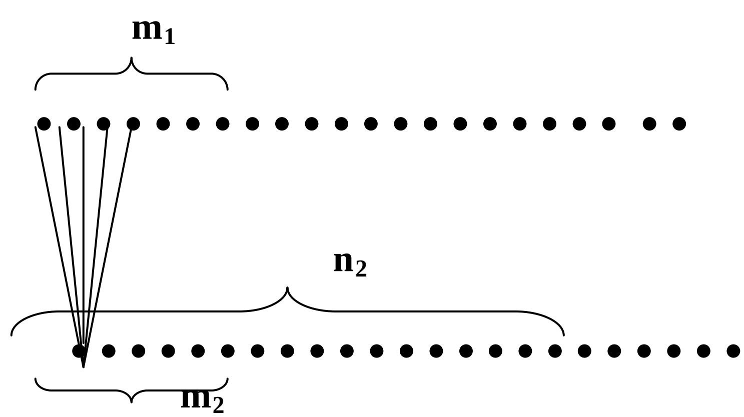


Figura de mai sus încearcă să ofere o ilustrare a acestei demonstraţii.

Pentru cazul a $\boldsymbol{n}$ evenimente $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ ... ... $\boldsymbol{A_n}$ se poate demonstra în mod analog egalitatea :

$$P(A_1 \text{ şi } A_2 \text{ şi } \ldots \ldots \text{ şi } A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots\cdots\cdots P(A_n) \qquad \textbf{(VII 14)}$$

Exemplul 1: Funcţionarea corectă a unui aparat depinde de corectitudinea funcţionării fiecăruia din cele 3 elemente componente. Probabilitatea de funcţionare corectă a celor 3 elemente în timpul unui ciclu să fie $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Să se găsească probabilitatea de funcţionare corectă aparatului în cursul unui ciclu de măsurători dat.

Soluţie: După teorema produsului (intersecţiei) avem:

$$p = p_1\, p_2\, p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}376$$

Remarcă: teorema 2 asupra sumei probabilităţilor evenimentelor compatibile se scrie:

$$P(A \text{ sau } B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Aceasta mai este şi teorema de reuniune a evenimentelor.

Exemplul 2: Probabilitatea de realizare a unui eveniment în cursul unei probe este egală cu ***p.*** Să se determine numărul de probe necesare pentru ca probabilitatea de realizare a evenimentului să fie mai mare sau egală cu ***Q***.

Soluţie: Vom putea scrie după teorema sumei şi produsului probabilităţilor

$$Q \geq 1 - (1 - p)^n$$

Rezolvând această inegalitate în raport cu ***n***, vom obţine:

$$n \geq \frac{\ln(1-Q)}{\ln(1-p)}$$

5. Evenimente dependente. Probabilitate condiţionată. Probabilitate totală.

Definiţia 1: Se spune că evenimentul ***A*** depinde de evenimentul ***B*** dacă probabilitatea realizării evenimentului ***A*** depinde de faptul dacă evenimentul ***B*** este sau nu realizat. Sau că ***B*** implică pe ***A*** se mai scrie:

$$A \subset B \quad \text{sau} \quad B \supset A$$

iar probabilitatea se notează cu ***P(A/B)*** şi se mai numeşte *probabilitate condiţionată a evenimentului* ***A*** ştiind că ***B*** este realizat.

Exemplul 1: O urnă conţine 3 bile albe şi 2 bile negre. Se extrage o primă bilă din urnă (prima extragere) apoi a doua (a doua extragere). Notăm cu ***B*** evenimentul ce actualizează apariţia unei bile albe la prima extragere şi ***A*** evenimentul care conduce la apariţia unei bile albe la a doua extragere.

Soluţie: La extragerea unei bile albe rămân 2 bile albe şi 2 negre, deci probabilitatea să se realizeze evenimentul ***A***, evenimentul ***B*** realizându-se , este :

$$P(A/B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Probabilitatea realizării lui A când B nu este realizat este:

$$\boldsymbol{P(A\,/\,\overline{B})} = \frac{3}{3}$$

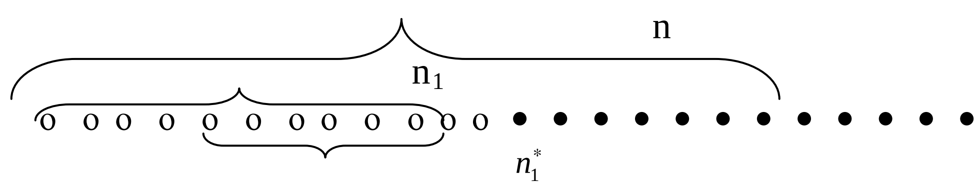
Se vede că: $\boldsymbol{P(A/B) \neq P(A\,/\,\overline{B})}$

Teorema 1: Probabilitatea de realizare simultană a două evenimente este egală cu produsul probabilităţii a unuia dintre ele prin probabilitatea condiţionată a celui de-al doilea, calculată cu condiţia ca primul eveniment să fie realizat, altfel spus:

$$\boldsymbol{P(A \text{ şi } B) = P(B) * P(A\,/\,B)} \qquad \textbf{(VII 15)}$$

Demonstraţie: Vom da o demonstraţie pentru evenimente care se reduc la schema urnelor (adică la care se poate aplica definiţia clasică a probabilităţii).

Presupunem că urna conţine $\boldsymbol{n}$ bile, din care $\boldsymbol{n_1}$ sunt albe iar $\boldsymbol{n_2}$ sunt negre. Presupunem însă că printre cele $\boldsymbol{n_1}$ bile albe un număr de n_1^* bile sunt notate cu asterisc şi că celelalte sunt albe simple: (Vezi figura.)



Extragem o bila din urnă, care este probabilitatea ca bila extrasă să fie o bilă albă marcată cu asterisc? Fie ***B*** evenimentul extragerii unei bile albe şi ***A*** evenimentul extragerii unei bile albe marcate. Rezultă că:

$$\boldsymbol{P(B)} = \frac{n_1}{n}$$

iar probabilitatea apariţiei unei bile albe marcate este condiţionată de extragerea unei bile albe, deci:

$$\boldsymbol{P(A\,/\,B)} = \frac{n_1^*}{n_1}$$

Probabilitatea extragerii unei bile albe cu asterisc este ***P(A*** şi ***B).*** Rezultă:

$$\boldsymbol{P(A \text{ şi } B)} = \frac{n_1^*}{n}$$

Dar

$$\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} * \frac{n_1^*}{n_1}$$

sau

$$\boldsymbol{P(A \text{ şi } B) = P(B) * P(A/B)} \qquad \textbf{(VII 16)}$$

şi teorema este demonstrată.

Dacă evenimentul considerat nu este în cadrul schemei clasice, atunci *formula 1* defineşte *probabilitatea condiţionată a evenimentului **A** dacă evenimentul **B** este realizat*. Aceasta este definită deci de formula:

$$\boldsymbol{P(A/B)} = \frac{P(A\ si\ B)}{P(B)} \ \textbf{(}\text{Dacă } \mathbf{P(B) \neq 0)} \qquad \textbf{(VII 17)}$$

Remarca 1: Aplicăm aceasta a doua formulă la expresia ***P(A şi B)*** Avem:

$$\boldsymbol{P(B \text{ şi } A) = P(A) * P(B / A)} \qquad \textbf{(VII 18)}$$

În egalităţile 16 şi 18 primii termeni sunt egali. Astfel:

$$\boldsymbol{P(A \text{ şi } B) = P(B) * P(A/B) = P(A) * P(B / A)} \qquad \textbf{(VII 19)}$$

Exemplul 2: Pentru cazul exemplului 1 dat la începutul acestui paragraf avem:

$$\boldsymbol{P(B)} = \frac{3}{5}; \qquad \boldsymbol{P(A/B)} = \frac{1}{2}$$

Vom obţine cu formula ***(1)*** :

$$P(A \text{ şi } B) = \frac{3}{5} * \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Probabilitatea ***P(A şi B)*** poate de asemenea să se obţină uşor printr-un calcul direct.

Exemplul 3: Probabilitatea de fabricaţie a unei piese de calitate conform normelor este pentru o mărime de 0,9. Probabilitatea de realizare a unei piese de calitate superioare normei pentru cele care o satisfac este de 0,8. Să se calculeze probabilitatea de realizare a unei piese de calitate superioară cu ajutorul unei maşini date.

Soluţie: Fie ***B*** evenimentul fabricării unei piese normale de maşină şi ***A*** evenimentul realizării unei piese de calitate superioară.

Aici ***P(B)*** = 0,9 ; ***P(A/B)*** = 0,8. Înlocuind aceste valori în **(VII 16)** obţinem:

$$P(A \text{ şi } B) = 0{,}9 * 0{,}8 = 0{,}72$$

Teorema 2: Dacă evenimentul ***A*** nu poate fi realizat decât dacă unul din evenimentele $B_1\ B_2\ \ldots\ \ldots\ B_n$ formând un sistem exhaustiv de evenimente mutuale incompatibile este realizabilă, atunci probabilitatea evenimentului ***A*** este dată de formula:

$$P(A) = P(B_1) * P(A/B_1) + P(B_2) * P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) * P(A/B_n) \quad \textbf{(VII 20)}$$

Demonstraţie: Evenimentul ***A*** poate avea loc dacă unul din toate evenimentele compatibile următoare este realizat.

$$(B_1 \text{ şi } A);\ (B_2 \text{ şi } A),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ (B_n \text{ şi } A).$$

Vom obţine deci în virtutea teoremei de adunare a probabilităţilor:

$$P(A) = P(B_1 \text{ şi } A) + P(B_2 \text{ şi } A) + \ldots\ldots + P(B_n \text{ şi } A); \quad \textbf{(VII 21)}$$

Înlocuind termenii din membrul drept al lui **(VII 21)** prin **(VII 16)** obţinem **(VII 20).**

Exemplul 4: Trei focuri de armă sunt trase asupra unei ţinte. Probabilitatea de a atinge ţinta este egală respectiv cu:

$$p_1 = 0,3$$
$$p_2 = 0,6$$
$$p_3 = 0,8.$$

Probabilitatea de distrugere a ţintei este $\lambda_1 = 0,2$ când ţinta este lovită odată, $\lambda_2 = 0,7$ când e lovită de două ori, si $\lambda_3 = 1,0$ când ea este lovită de trei ori. Să se determine probabilitatea de distrugere a ţintei după executarea celor trei focuri. (evenimentul A).

Soluţie: Considerăm sistemul exhaustiv de evenimente mutuale incompatibile.

B_1 = o lovitură în plin (o atingere)
B_2 = 2 lovituri în plin
B_3 = 3 lovituri în plin
B_4 = nici o lovitură

Determinăm probabilitatea fiecărui eveniment. Ţinta va fi lovită o dată dacă este atinsă de primul foc şi nu este lovită de cel de-al doilea foc şi de cel de al treilea, apoi dacă este lovită numai de al doilea şi de primul şi de al treilea nu este lovită, şi dacă este lovită numai de al treilea iar nu de primele două.

Atunci conform teoremei produsului şi sumei probabilităţilor, avem:

$$P(B_1) = p_1(1- p_2)(1- p_3) + (1- p_1)\, p_2\, (1- p_3) + (1- p_1)(1- p_2)\, p_3 = 0,332$$

Prin acelaşi raţionament, obţinem:

$$P(B_2) = p_1 p_2 (1- p_3) + p_1(1- p_2)\, p_3 + (1- p_1)\, p_2\, p_3 = 0,468$$

$$P(B_3) = p_1p_2\,p_3 = 0{,}144$$

$$P(B4) = (1- p_1)\,(1- p_2)\,(1- p_3) = 0{,}056$$

Scriem probabilităţile condiţionate de distrugere a ţintei, în cazul realizării fiecăruia din aceste evenimente:

$$P(A/B_1) = 0{,}4; \quad P(A/B_2) = 0{,}7; \quad P(A/B_3) = 1{,}00; \quad P(A/B_4) = 0.$$

Înlocuind expresiile obţinute în **(VII 21),** vom obţine probabilitatea de distrugere a ţintei:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) + P(B_4)P(A/B_4) =$$

$$= 0{,}332 * 0{,}4 + 0{,}468 * 0{,}7 + 0{,}144 * 1{,}00 + 0{,}056 * 0 = 0{,}6044.$$

Remarca 2: Dacă evenimentul A nu depinde de evenimentul B, avem:

$$P(A/B) = P(A)$$

şi formula **(16)** are forma:

$$P(A \text{ si } B) = P(B)P(A)$$

Adică formula **(VII 13).**

6. Probabilitatea cauzelor. Formula lui Bayes.

Punerea problemei. Considerăm de asemenea un sistem exhaustiv de evenimente mutuale incompatibile B_1 , B_2 ,……., B_n ale căror probabilităţi corespunzătoare sunt $P(B_1)$, $P(B_2)$, …….., $P(B_n)$. Evenimentul A nu poate avea loc decât împreună cu unul din evenimentele B_1 , B_2 ,……., B_n , pe care le numim cauze (sau ipoteze).

În virtutea formulei **(20)** probabilitatea realizării evenimentului A va fi:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots\ldots. + P(B_n)P(A/B_n) \quad \textbf{(VII 22)}$$

Presupunem că evenimentul A va fi realizat. Actualizarea evenimentului A va antrena o modificare a probabilităţilor cauzelor $P(B_1)$, $P(B_2)$, …….., $P(B_n)$. Determinând probabilităţile condiţionate a acestor cauze şi presupunând că evenimentul A este actualizat, în alţi termeni, determinăm:

$$P(B_1 / A),\ P(B_2 / A),\ \ldots\ P(B_n / A)$$

Soluţia problemei**:* Cu ajutorul relaţiei ***(19) găsim:

$$P(A \text{ şi } B) = P(B_1)\, P(A/B_1) = P(A)\, P(B_1/A)$$

de unde vom găsi:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$$

Înlocuind pe $P(A)$ cu expresia sa din ***(22)*** obţinem:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)} \qquad \textbf{(VII 23)}$$

În mod analog, găsim: $P(B_2 /A)$ … sau

$$\boldsymbol{P(B_k/A)} = \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)} \qquad \textbf{(VII 24)}$$

Formulele **(VII 23)** sau **(VII 24)** se numesc **formulele lui Bayes, sau teorema cauzelor.**

Remarcă: Din formula **(24)** rezultă că în expresia probabilităţii $\boldsymbol{P(B_k / A)}$ (probabilitatea de realizare a cauzei $\boldsymbol{B_k}$, după actualizarea evenimentului ***A)*** numitorul nu depinde de indicele ***k***.

Exemplul 1: Presupunem că înaintea unei probe, există 4 cauze echiprobabile
$\boldsymbol{B_1, B_2, B_3, B_4}$ **.**

$$\boldsymbol{P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4)} = 0{,}25$$

Probabilităţile condiţionate ale realizării evenimentului ***A*** sunt respectiv:

$\boldsymbol{P(A/B_1)} = 0{,}7$ $\boldsymbol{P(A/B_2)} = 0{,}1$
$\boldsymbol{P(A/B_3)} = 0{,}1$ $\boldsymbol{P(A/B_4)} = 0{,}02$

Presupunem că după probă evenimentul ***A*** se realizează. Vom obţine, după formula **(24)**

$$\boldsymbol{P(B_1/A)} = \frac{0{,}25*0{,}7}{0{,}25*0{,}7+0{,}25*0{,}1+0{,}25*0{,}1+0{,}25*0{,}02} = \frac{0{,}175}{0{,}23} \approx 0{,}76$$

$$\boldsymbol{P(B_2/A)} = \frac{0{,}25*0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11$$

$$\boldsymbol{P(B_3/A)} = \frac{0{,}25*0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11$$

$$\boldsymbol{P(B_4/A)} = \frac{0{,}25*0{,}02}{0{,}23} = 0{,}02$$

Avem aici $\boldsymbol{P(B_1)} = 0{,}25$; $\boldsymbol{P(B_1/A)} = 0{,}76$ care este mai mare deoarece evenimentul ***A*** este realizat

$$P(A/B_1) = 0{,}7$$

7. Variabile aleatoare discrete. Legea de distribuţie a unei variabile aleatoare

Definiţia 1: Variabila x luând în urma unei măsurători una din valorile unei suite finite sau infinite $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ se numeşte variabilă aleatoare discretă dacă la fiecare valoare x_k corespunde o probabilitate p_k pentru ca variabila x ia valoarea x_k.

Rezultă din definiţie că la fiecare valoare x_k îi este asociată o probabilitate p_k

Relaţia funcţională ce leagă probabilitatea p_k de x_k este numită legea de distribuţie a probabilităţilor unei variabile aleatoare discrete, sau simplu „legea de distribuţie" .(vezi tabelul)

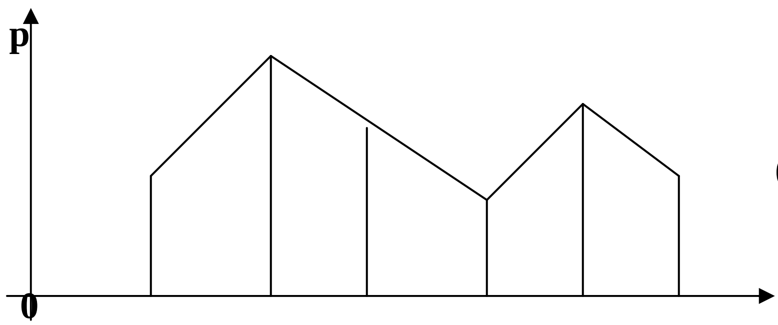
Aceeaşi lege de distribuţie poate fi dată grafic, sub forma unui poligon de distribuţie când se construieşte într-un sistem de coordonate punctele de coordonate (x_k , p_k) pe care le reunim printr-o linie frântă.(vezi fig.)

Legea de distribuţie poate de asemenea să fie dată sub formă analitică.

$$P_k = f\,(x_k)$$

Valori posibile ale variabilei aleatoare	x_1 x_2 …………………. …….. x_k …………
Probabilitatea acestor valori	p_1 p_2 …………………. …….. p_k …………

(tabel 1)



(fig. 1)

Faptul că variabila aleatoare ***x*** va lua cu necesitate una din valorile sumei

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k \ldots$$

este un eveniment cert astfel că avem întotdeauna:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \qquad \textbf{(VII 25)}$$

pentru o serie finită, sau:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \qquad \textbf{(VII 25')}$$

pentru o serie infinită.

Exemplul 1: Probabilitatea ca să iasă unul din numerele de pe feţele unui zar este $\frac{1}{6}$

x	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemplul 1: Fie ***p*** probabilitatea de realizare a evenimentului ***A*** în cursul fiecărei probe în parte dintr-o serie infinită de probe. Variabila aleatoare ***x*** este numărul de ordine al experienţei în cursul

căreia evenimentul ***A*** se realizează pentru prima dată . Să se găsească legea de distribuţie a variabilei aleatoare ***x.***

Soluţie: Variabila aleatoare ***x*** poate să ia oricare valoare 1,2,3… Probabilitatea p_1 pentru ca evenimentul ***A*** să fie realizat în cursul unei probe va fi:

$$P_1 = P(A) = p$$

Probabilitatea p_2 pentru ca evenimentul ***A*** să nu fie realizat în cursul primei probe şi să se realizeze în cea de-a doua este:

$$P_2 = P(\bar{A} \text{ si } A) = (1-p)\, p$$

Probabilitatea p_3 pentru ca evenimentul ***A*** să nu fie realizat nici în prima probă şi nici în cea de-a doua probă, ci numai în a treia va fi:

$$P_3 = P(\bar{A} \text{ si } \bar{A} \text{ si } A) = (1-p)\,(1-p)\, p = (1-p)^2\, p$$

şi aşa mai departe:

$$p_k = (1-p)^{k-1} p \qquad \textbf{(VII 26)}$$

Tabloul de distribuţie va fi:

x	1	2	3	……….	k	………
p_k	p	(1-p)p	$(1-p)^2p$	……..	$(1-p)^{k-1}$ p	……..

Avem deci şi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

deoarece $\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}$ este o serie geometrică cu raţia (1-p)

Problema studiată mai sus se aplică problemei tirului până când primul foc va lovi ţinta.

8. Frecvenţa relativă si probabilitatea frecvenţei relative în cursul unor măsurători (încercări - probe) repetate.

Să ne imaginăm că se efectuează o serie de ***n*** probe. În cursul fiecărei probe un eveniment ***A*** poate să aibă loc cu probabilitatea ***p***. Fie ***x*** variabilă aleatoare ce defineşte frecvenţa relativă de realizare a evenimentului ***A*** în cursul unei serii de ***n*** probe. Se cere să se determine legea de distribuţie a variabilei aleatoare ***x*** pentru o serie de ***n*** probe.

Este evident că variabila aleatoare ***n*** va lua în cursul celor ***n*** probe una din valorile următoare:

$$\frac{0}{n}\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \frac{n}{n}$$

Teorema 1: Probabilitatea $\boldsymbol{P(x = \frac{m}{n})}$ pentru ca variabila aleatoare ***x*** să ia valoarea $\frac{m}{n}$, altfel spus, pentru ca în cursul a ***n*** probe, evenimentul ***A*** să se realizeze de ***m*** ori şi evenimentul contra $\overline{A}$ ***(A*** nu are) de (***n-m***) ori este egală $C_n^m\ p^m\ q^{n-m}$ unde C_n^m este numărul de combinaţii de ***n*** elemente luate de ***m*** ori; ***p*** este probabilitatea evenimentului ***A; p = P(A); q*** este probabilitatea de nerealizare a evenimentului ***A***, altfel spus $\boldsymbol{q = 1- p = P(\overline{A})}$ **.**

Demonstraţie: Evenimentul ***A*** se produce de ***m*** ori în cursul a ***n*** probe dacă de exemplu, evenimentele $\overline{A}$ şi ***A*** se succed după cum urmează:

$$\underbrace{AA\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A}_{\boldsymbol{n}} \qquad \underbrace{\overline{A}\ \overline{A}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \overline{A}}_{\boldsymbol{n-m}}$$

Altfel spus, în cursul primelor ***m*** probe, evenimentul ***A*** apare şi în cursul ultimului (***n-m***) următoare probe, evenimentul nu apare adică se realizează evenimentul ($\overline{A}$).

Dar conform teoremei:

$$P(A) = p \qquad P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

În virtutea termenului produsului, probabilitatea unei astfel de succesiuni de evenimente va fi:

$$p^m \, q^{n-m}$$

Evenimentul ***A*** poate de asemenea să se producă de ***m*** ori în cursul celor ***n*** probe cu o altă succesiune a evenimentelor ***A*** si $\bar{A}$, de exemplu următoarea succesiune:

$$A \underbrace{AA\ldots\ldots\ldots A}_{m-1} \quad \underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\ldots\ldots\ldots\bar{A}}_{n-m}$$

1

Necesar este ca evenimentul A să se producă cu necesitate de ***m*** ori si evenimentul ***A*** de ***n-m*** ori. Probabilitatea unei astfel de succesiuni este:

$$P^{m-1} \, q^{n-m} \, p = p^m \, q^{\,n-m}$$

Dar câte succesiuni diferite ale evenimentelor ***A*** si $\bar{A}$ sunt posibile pentru ***n*** probe dacă evenimentul ***A*** este realizat de ***m*** ori.

Este evident că numărul lor corespunde numărul de combinaţii de ***n*** elemente luate de ***m*** ori.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(m-1)]}{1*2*3*\ldots\ldots*n}$$

Vom obţine, conform teoremei că:

$$P\left(x = \frac{m}{n}\right) = \underbrace{p^m q^{\,n-m} + p^m q^{\,n-m} + \ldots\ldots + p^m q^{\,n-m}}_{C_n^m}$$

sau încă:

$$P\left(x = \frac{m}{n}\right) = C_n^m \ p^m q^{n-m} \qquad \textbf{(VII 27)}$$

şi teorema este demonstrată.

Demonstraţia teoremei ne permite să definim legea de distribuţie a unei variabile aleatoare ***x***, pe care o punem sub formă de tablou:

x	$\frac{0}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	….. … $\frac{m}{n}$.
$\frac{n}{n}$				
$P\left(x = \frac{m}{n}\right)$	$1^* \ q^n$	$C_n^1 pq^{\ n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{\ n-2}$	$C_n^m p^m q^{n-m}$ ..
$p^{\frac{1}{n}}$				

Legea de distribuţie astfel obţinută se numeşte lege binomială deoarece probabilitatea :

$$\boldsymbol{P\left(x = \frac{m}{n}\right)}$$

sunt egali cu termenii corespunzători dezvoltării expresiei:

$$\boldsymbol{(q + p)^n}$$

după formula binomială:

$$\boldsymbol{(q + p)^m} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \, p^m \, q^{\,n-m} \qquad \textbf{(VII 28)}$$

suma probabilităţilor tuturor valorilor posibile este după cum se poate vedea egală cu 1, deoarece:

$$\boldsymbol{(p + q)^m = 1^n = 1}$$

Remarcă: În studiul diferitelor probleme avem nevoie de a determina probabilitatea pentru ca evenimentul ***A*** să fie realizat cel puţin o singură dată, astfel spus frecvenţa relativă a evenimentului $x \geq \frac{1}{n}$.

Este evident că probabilitatea $P(x \geq \frac{1}{n})$ este determinată plecând de la egalitatea:

$$P(x \geq \frac{1}{n}) = 1 - p(x = \frac{0}{n}) = 1 - q^n \qquad \textbf{(VII 29)}$$

Din tabloul de distribuţie rezultă că probabilitatea $P(x \geq \frac{k}{n})$, pentru ca evenimentul să aibă loc de cel puţin ***k*** ori va fi determinat de formula:

$$P(x \geq \frac{k}{n}) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad \textbf{(VII 30)}$$

sau încă:

$$P(x \geq \frac{k}{n}) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad \textbf{(VII 31)}$$

Exemplul 1: Să se reprezinte grafic legea de distribuţie a unei variabile aleatoare ***x*** pentru ***n*** = 8, ***p*** $= \frac{1}{2}$; ***q*** $= \frac{1}{2}$

Soluţie: Determinăm toate valorile probabilităţilor din tablou:

$$\mathbf{P}(x=0) = C_8^0 q^8 = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

$$\mathbf{P}(x=\frac{1}{8}) = C_8^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{8}{1} \frac{1}{256} = \frac{1}{32}$$

$$\mathbf{P}(x=\frac{2}{8}) = C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \frac{1}{28} = \frac{7}{64}$$

$$\mathbf{P}(x=\frac{3}{8}) = C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{28} = \frac{7}{32}$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{4}{8}\right) = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ \frac{1}{2} = \frac{32}{128}$$

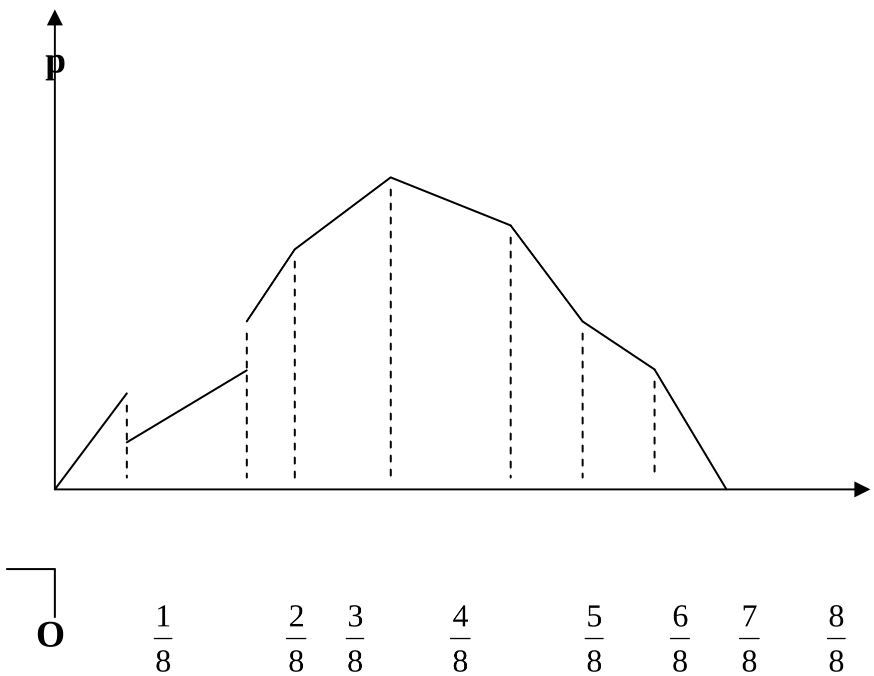
$$\mathbf{P}\left(x=\frac{5}{8}\right) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{6}{8}\right) = C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{64}$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{7}{8}\right) = C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{32}$$

$$\mathbf{P}\left(x=\frac{8}{8}\right) = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

Graficul acestei reprezentări este:



Exemplul 2: Care este probabilitatea pentru ca evenimentul ***A*** să se producă de 2 ori:

a) în timpul a două probe

b) în cursul a trei probe

c) în cursul a zece probe dacă probabilitatea de realizare are un eveniment în cursul fiecărei probe de 0,4.?

Soluţie:

a) Aici **n**=2; **p**=0,4 ; **q**=0,6

$$\boldsymbol{P}(\ x = \frac{2}{2}) = C_2^2\ p^2q^0 = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot(0,4)^2 = 0{,}16$$

b) Aici **n**=3; **p**=0,4 ***;*** **q**=0,6

$$\boldsymbol{P}(\ x = \frac{2}{3}) = C_3^2\ p^2q^1 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot(0,4)^2 * 0{,}6 = 0{,}288$$

c) Aici **n**=10***;*** **p**=0,4 ***;*** **q**=0,6

$$\mathbf{P}(\ x = \frac{2}{10}) = C_{10}^2\ p^2q^8 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot(0,4)^2(0{,}6)^8 = 0{,}121$$

Exemplul 3: Se efectuează 4 probe independente. Probabilitatea de realizare a evenimentului ***A*** este 0,5 pentru fiecare probă. Să se determine probabilitatea pentru ca evenimentul ***A*** să se realizeze de cel puţin 2 ori.

Soluţie: Aici **n** = 4; **p** = 0,5 ***;*** **q** = 0,5;

$$\mathbf{P}(x \geq \frac{2}{4}) = \mathbf{P}(x = \frac{2}{4}) + \mathbf{P}(x = \frac{3}{4}) + \mathbf{P}(x = \frac{4}{4})$$

sau

$$\mathbf{P}(x \geq \frac{2}{4}) = 1 - \mathbf{P}(x = \frac{0}{4}) + \mathbf{P}(x = \frac{1}{4})$$

Calculăm probabilitatea:

$$\mathbf{P}(x < \frac{2}{4}) = \mathbf{P}(x = \frac{0}{4}) + \mathbf{P}(x = \frac{1}{4}) = q^4 + 4q^3\,p^1 = (0{,}5)^4 + 4(0{,}5)^4 = 0{,}3125$$

Vom obţine în consecinţă utilizând formula a doua:

$$\mathbf{P}(x \geq \frac{2}{4}) = 1 - [(0,5)^4 + 4(0,5)^4] = 0,6875 \approx 0,69$$

Exemplul 4: Probabilitatea rebutului într-un lot de piese este **p** = 0,1. Care este probabilitatea pentru ca într-un lot de 3 piese să avem **m** = 0; **m** = 1; **m** = 2; **m** = 3 piese defecte?

$$\mathbf{P}(x = \frac{0}{3}) = C_3^0 q^3 = 1\ (0,9)^3 = 0,729$$

$$\mathbf{P}(x = \frac{1}{3}) = C_3^1\ p^2\ q = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot 0,1\cdot(0,9)^2 = 0,243$$

$$\mathbf{P}(x = \frac{2}{3}) = C_3^2\ p\ q^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot(0,1)^2 * (0,9) = 0,027$$

$$\mathbf{P}(x = \frac{3}{3}) = C_3^3\ p^3 = 1\cdot(0,1)^3 = 0,001$$

9. Speranţa matematică a unei variabile aleatoare discrete.

Fie ***x*** o variabilă aleatoare discretă a cărei lege de distribuţie este următoarea:

x	x_1	x_2	x_3	…..	… x_k	… ……	x_n
$P(x = x_k)$	p_1	p_2	p_3	…………………	p_k		p_n

Definiţia 1: Se numeşte speranţa matematică a variabilei aleatoare discrete ***x*** (pe care o notăm cu ***M[x]*** sau m_x) suma tuturor

valorilor posibile ale variabilei aleatoare prin probabilităţile respective ale acestor valori

$$\mathbf{M[x]} = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots + \ x_n\, p_n \qquad \textbf{(VII 32)}$$

sau mai simplu:

$$\mathbf{M[x]} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, p_k \qquad \textbf{(VII 33)}$$

În acest caz avem, după cum am menţionat mai sus:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Dacă valorile variabilei aleatoare formează o serie infinită de valori, atunci

$$\mathbf{M_x} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p_k \qquad \textbf{(VII 34)}$$

Noi nu vom considera decât variabilele aleatoare pentru care această serie converge. Să stabilim acum relaţia dintre speranţa matematică a unei variabile aleatoare şi media aritmetică a valorilor variabilei aleatoare pentru un număr mare de probe ; mai exact să arătam că pentru un număr mare de probe, media aritmetică a valorilor observate este aproape de speranţa matematică sau în virtutea „capitolului 1” putem afirma că media aritmetică a valorilor observate a unei variabile aleatoare tinde, când numărul de probe creşte nedefinit, spre speranţa matematică.

Să ne imaginăm că efectuăm N **probe independente. Presupunem că:**

- valoarea x_1 se manifestă de n_1 ori
- valoarea x_2 se manifestă de n_2 ori

……………………………………..

……………………………………..

- valoarea x_v se manifestă de n_v ori

Variabila aleatoare x ia valorile x_1 , x_2 , x_3 , …………x_v
Să calculăm media aritmetică a valorilor obţinute de variabila x (vom nota aceasta medie aritmetică prin $\bar{M}$ [x] sau $\bar{m}_x$).

Avem deci:

$$\bar{m}_x = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_v n_v}{N} =$$

$$x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_v \frac{n_v}{N} \qquad \textbf{(VII 35)}$$

Cum pentru un număr mare de probe N frecvenţa relativă tinde spre probabilitatea de realizare a valorii x_k , avem:

$$\sum_{k=1}^{v} x_k \frac{n_k}{N} \approx \sum_{k=1}^{v} x_k p_k$$

Rezultă deci imediat că:

$$\bar{M}\,[x] \underset{n\to\infty}{\rightarrow} M\,[x] \qquad \textbf{(VII 36)}$$

Remarca 1: Dacă am considera schema urnelor cu N bile, din care n_1 bile marcate cu semnul x_1 si n_2 marcate cu semnul x_2 …..etc, numărul sperat când se extrage o bilă, va fi dat de forma **(34)** altfel spus este egal cu $\bar{m}_x$.

Soluţia: Variabila aleatoare x poate să ia valorile :

$$\mathbf{x_1 = 0;\ x_3 = 1;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3.}$$

Vom pune într-un tablou distribuţia variabilei aleatoare date. Vom găsi probabilitatea acestor valori după teorema probelor repetate. (**n=3; p = 0,4; q = 0,6)**

$$\mathbf{P}(x = 0) = C_3^0 \ (0,6)^3 = 0,216$$

$$\mathbf{P}(x = 1) = C_3^1 \ (0,4)(0,6)^2 = 0,432$$

$$\mathbf{P}(x = 2) = C_3^2 \ (0,4)^2(0,6) = 0,288$$

$$\mathbf{P}(x = 3) = C_3^3 \ (0,4)^3 = 0,064$$

Tabloul distribuţiei variabilei aleatoare va fi:

x	0	1	2	3
$P(x = x_k)$	0,46	0,432	0,288	0,064

Vom calcula speranţa matematică după formula(34).

$$\bar{m}_x = 0*0,0216 + 1*0,432 + 2*0,288 + 3*0,064 = 1,2 \text{ realizări}$$

Exemplul 2. Se efectuează o probă în cursul căreia evenimentul ***A*** poate sau nu avea loc. Probabilitatea ca evenimentul să se realizeze este egală cu ***p***. Să se determine speranţa matematică a variabilei aleatoare X exprimând numărul de realizări al evenimentului.
Formăm tabloul distribuţiei variabilei aleatoare:

x	0	1
p_k	1-p	p

Remarca 2. Se poate stabili în continuare că speranţa matematică ***M[x]*** a numărului de realizare a evenimentului ***A*** în cursul a ***n*** probe independente este egală cu produsul numărului de probe prin probabilitatea ***p*** de realizare a evenimentului ***A*** în fiecare probă.

$$M[x]= np \qquad \textbf{(VII 37)}$$

Soluţia problemei de la exemplul **1** va fi astfel:

$$\mathbf{M[x]= n*p = 3 \cdot 0,4 = 1,2} \text{ realizări}$$

Dacă în formula **(37)** se cunoaşte **M[x]** şi **p**, se poate găsi ***n*** care este numărul de probe care dau speranţa matematicii cerută de numărul de realizări a evenimentului.

Exemplul 3. Să se determine speranţa matematică a variabilei aleatoare al cărui tablou de distribuţie este următorul:

x	1	2	3	… k ……
p_k	p	(1-p)p	$(1-p)^2$ p	…$(1-p)^{k-1}$ p…

Soluţie: Avem în virtutea relaţiei **(34)** notând cu ***1-p = q***

$$\mathbf{m_x} = 1 * p + 2q.p + 3q^2p + \ldots\ldots\ldots + kq^{k-1}p + \ldots\ldots =$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots\ldots + kq^{k-1} + \ldots) =$$

$$= p(q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots.. + q^k + \ldots\ldots.)' =$$

$$= p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Astfel:

$$\boldsymbol{m_x} = \frac{1}{p}$$

Notăm ca $\mathbf{m_x} \to \mathbf{1}$ când $\mathbf{p} \to \mathbf{1}$

$\mathbf{m_x} \to \infty$ când $\mathbf{p} \to \mathbf{0}$

Se pot explica aceste relaţii bazându-ne pe sensul problemei.

Dacă probabilitatea de realizare a evenimentului ***A*** este pentru fiecare probă aproape **1** (***p*** $\approx$ ***1***), se poate aştepta ca evenimentul **A** să aibă loc în cursul unei singure probe (prima) ($m_x \approx 1$). Din contră, dacă probabilitatea ***p*** este mică ($p \approx 0$)**,** se poate aştepta ca pentru realizare să fie efectuat un număr mare de probe ($m_x \approx \infty$).

Se numeşte centrul de distribuţie a probabilităţilor variabilei aleatoare X speranţa matematică a variabilei aleatoare **X.**

Remarca 3: Termenul ” centru de distribuţie a probabilităţilor” este introdus prin analogie cu cel al „centrului de greutate”. Dacă pe axa **0x** se atribuie punctele de abscise $x_1, x_2, \ldots, x_n$; masele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se ştie de la mecanica teoretică că centrul de greutate al acestor mase va fi determinată de formula.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \qquad \textbf{(VII 38)}$$

Dacă

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

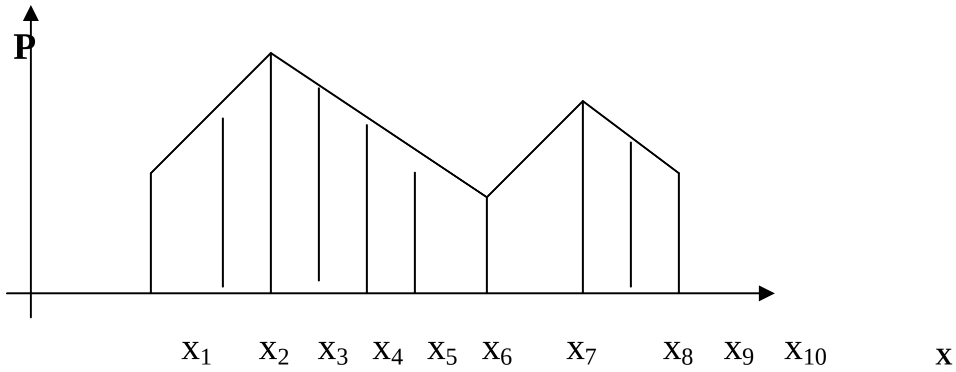
Atunci

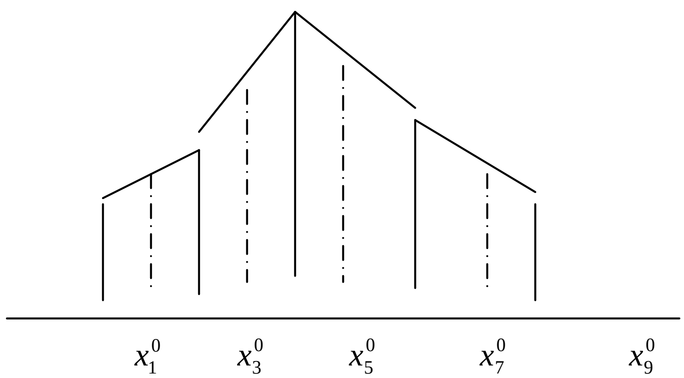
$$x_c = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \qquad \textbf{(VII 39)}$$

Formula **(39)** coincide cu formula speranţei matematice **(34).**

Am stabilit astfel că centrul de greutate şi speranţa matematică se calculează cu ajutorul unor formule analoage. Aceasta este motivul pentru care am introdus termenul „ centru de distribuţie a probabilităţilor”.

Fie dată o variabilă aleatoare ***x*** cu legea sa de distribuţie dată de figura alăturată: (fig 1). Presupunem că speranţa sa matematică este m_x.





Considerăm diferenţa între variabilele aleatoare $\boldsymbol{x}$ şi speranţa matematică $\boldsymbol{x- m_x}$. Vom numi această variabilă centrală sau abatere şi o vom nota prin $\boldsymbol{x^0}$.

Este evident că legea de distribuţie a acestei variabile aleatoare $\boldsymbol{x^0}$ va fi (cf. fig. 2)

x^0	$x_1^0 = x_1 - m_x$	$x_2^0 = x_2 - m_x$	…………..	$x_k^0 = x_k - m_x$
p_k	p_1	p_2	……………..	p_k

Vom găsi speranţa matematică a variabilei aleatoare centrală:

$$\mathbf{M}\,[\,x - m_x\,] = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)p_k - \sum_{k=1}^{n}x_k p_k - \sum_{k=1}^{n}m_k p_k =$$

$$= m_x - m_k \sum_{k=1}^{n} p_k = m_x - m_x \cdot 1 = 0 \qquad \text{(VII 40)}$$

Astfel *speranţa matematică a unei variabile aleatoare centrale este nulă.*

Remarca 4. Este util câteodată să se considere o variabilă nealeatoare (certă) constantă ca o variabilă aleatoare, care ia la probabilitatea ***1*** valoarea **c** şi la probabilitatea ***0*** altă valoare.

În acest sens se poate apoi să se vorbească de speranţa matematică a unei constante.

10. Varianţa (fluctuaţia) dispersă sau abaterea medie pătratică . Noţiunea de momente

O altă caracteristică cantitativă a variabilei aleatoare ***x***, care diferă de valoarea medie care determină poziţia centrului de distribuţie a probabilităţilor, este *varianţa* sau *dispersia* variabilei aleatoare.

Vom nota varianţa prin ***D*** Varianţa este caracteristica numerică a împrăştierii, deviaţia valorilor variabilelor aleatoare în raport cu valoarea medie a acestei variabile.

Definiţia 1: Se numeşte varianţa variabilei aleatoare ***X*** speranţa matematică a pătratului diferenţei dintre variabila aleatoare ***X*** si speranţa sa matematică (altfel spus speranţa matematică a pătratului variabilei aleatoare centrată corespunzătoare.)

$$\mathbf{D[x] = M[(x-m_x)^2]}$$

sau

$$\mathbf{D[x]} = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 p_k$$

Varianţa nu posedă aceeaşi unitate de măsură ca şi variabila aleatoare . Uneori este comod pentru a caracteriza dispersia valorilor, de a utiliza o mărime a cărei unitate de măsură coincide cu cea a variabilei aleatoare, pe care o numim *abatere medie pătratica* .

Definiţia 2: Se numeşte *abatere standard* a variabilei aleatoare, rădăcina pătrată a varianţei.

$$\mathbf{G[x]} = \sqrt{D[x]}$$

sau sub o formă mai explicită

$$\mathbf{G[x]} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2\ p_k}$$

Aleatoarea standard este uneori notată şi cu σ

Remarca 1: Pentru calcule este comod să se transforme formula (VII 40) după cum urmează:

$$\mathbf{D[x]} = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_k)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2\ p_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k m_x p_k + \sum_{k=1}^{n} m_x^2 p_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - \mathbf{2}\, m_x \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + m_x^2 \sum_{k=1}^{n} p_k =$$

$$= \mathbf{M[}\, x^2 \mathbf{]} - \mathbf{2}\, m_x m_x + m_x^2 * 1 =$$

$$= \mathbf{M[}\, x^2 \mathbf{]} - m_x^2$$

Astfel

$$\mathbf{D[x] = M[x^2] -}\ m_x^2$$

Altfel spus varianţa este egală cu diferenţa speranţei matematice a pătratului variabilei aleatoare şi pătratul speranţei matematice a variabilei aleatoare.

Exemplul 1. Se efectuează o experienţa în cursul căreia evenimentul ***A*** poate să se producă sau nu. Probabilitatea de realizare a evenimentului ***A*** este egală cu ***p***. Să se determine speranţa matematică, varianţa şi abaterea pătratică medie.

Soluţie:

Aşezăm într-un tablou valorile numărului de realizare a evenimentului (***q = 1-p***):

x	1	0
p_k	p	q

în consecinţă:

M[x] = 1* p + 0 * q = p

D[x] = $(1- p)^2$ + $(0 - p)^2$ q = q * p

G[x] = $\sqrt{p\,q}$

Pentru a elucida sensul noţiunilor varianţei şi abaterii pătratice medii precum şi caracteristicile dispersiei variabilei aleatoare considerăm câteva exemple:

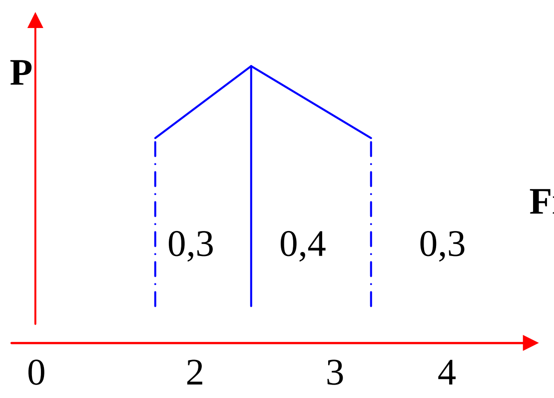


Fig 3

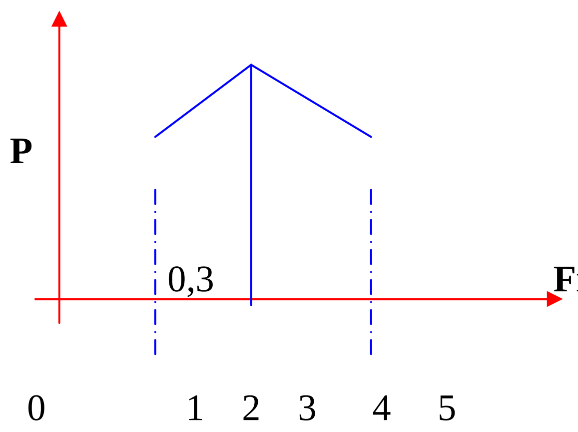


Fig 4

Exemplul 2: Variabila aleatoare ***x*** dată de legea de distribuţie următoare (vezi F**ig. 3**)

x	2	3	4
p_k	0,3	0,4	0,3

Să se determine:

1. $M[x] = 2 * 0,3 + 3 * 0,4 + 4 * 0,3 = 3$
2. $D[x] = (2-3)^2 * 0,3 + (3-3)^2 * 0,4 + (4-3)^2 * 0,3 = 0,6$
3. $G[x] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0,6} = 0,77$

Exemplul 3. Variabila aleatoare ***x*** este dată de legea de distribuţie următoare (F**ig. 4**)

x	1	3	5
p_k	0,3	0,4	0,3

Să se determine:

1. Speranţa matematică
2. Varianţa
3. Abaterea pătratică medie

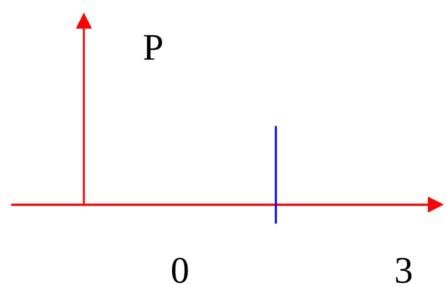
Soluţie:

1. M[x] = 1 * 0,3 + 3 * 0,4 + 5 * 0,3 = 3
2. D[x] = $(1-3)^2$ * 0,3 + $(3-3)^2$ * 0,4 + $(5-3)^2$ * 0,3 = 2,6
3. G[x] = $\sqrt{2,6}$ = 1,55

Dispersia, deviaţia variabilei aleatoare, este în exemplul **2** inferioară dispersiei variabilei aleatoare din cel de al doilea exemplu. Variabilele (fluctuaţiile) acestor mărimi sunt respectiv egale cu **0,6** şi **2,4.**

Exemplul 4. Variabila aleatoare este dată de legea de distribuţie următoare:

x	3
p	1



Să se determine:

1. speranţa matematică
2. varianţa (fluctuaţia)
3. abaterea pătratică medie

Soluţie:

1. M[x] = 3 * 1 = 3
2. D[x] = $(3-3)^2$ * 1 = 0
3. G[x] = 0

dispersia acestei variabile aleatoare este nulă.

Remarca 2. Dacă considerăm o cantitate constantă ca o variabilă aleatoare, care ia valoarea **c** cu o probabilitate **l**, se demonstrează uşor că **D(c)= 0.**

Demonstraţie. Am arătat deja că **M(c)= c**. Cu ajutorul formulei **(VII 40)** avem:

$$D[c] = M\,[(c-c)^2] = M[0] = 0$$

Remarca 3. Prin analogie cu terminologia utilizată în mecanică se numesc momente centrale de primul sau al doilea ordin al variabilei aleatoare ***x*** speranţa matematică a cantităţilor $(x-\ m_x);\ (x-\ m_x)^2$. Se consideră de asemenea momentul centrat de ordinul trei:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2\ p_k$$

Dacă variabila aleatoare este distribuită simetric în raport cu centrul distribuţiei probabilităţilor (**Fig 1**), este evident că momentul său central de ordinul 3 va fi nul. Dacă momentul central de ordinul trei este nul, variabila aleatoare nu posedă o distribuţie simetrică.

11.Funcţii de variabile aleatoare

Presupunem că legea de distribuţie a variabilei aleatoare ***x*** să fie dată sub forma tabloului următor.

x	x_1	x_2	….	x_k	………..	x_n
p	p_1	p_2	….	p_k	………..	p_n

Considerăm o funcţie de variabilă aleatoare ***x.***

$$y = f(x)$$

Valorile funcţiei ***y_k = f(x_k)*** vor fi valori ale variabilei aleatoare ***y.***

Dacă toate valorile ***y_k = f(x_k)*** sunt diferite, legea de distribuţie a variabilei aleatoare ***y*** va fi dată prin tabloul:

$y = f(x)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	…………….	$y_n = f(x_n)$
p	p_1	p_2	....	p_n

Dacă pentru valorile ***y_k = f(x_k)*** unele sunt egale între ele, coloanele corespunzătoare vor fi reunite într-una singură însumând probabilităţile corespunzătoare.

Speranţa matematică a funcţiei ***y = f(x)*** a variabilei aleatoare ***x*** va fi determinată cu ajutorul unei formule cunoscută.

$$M[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, p_k$$

Se defineşte de asemenea varianţa funcţiei:

$$D[f(x)] = M[(f(x) - M[f(x)])^2] = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - m_{f(x)})^2\, p_k$$

Exemplul 1. Legea de distribuţie **φ** a unei variabile aleatoare este dată de următorul tablou:

φ	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$	**0**	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$
p_k	**0,1**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,3**

Se consideră funcţia:

y= A sinφ

a acestei variabile aleatoare.
Dispunem în tablou distribuţia variabilei aleatoare **y**:

y	**- A**	$-\frac{A\sqrt{2}}{2}$	**0**	$\frac{A\sqrt{2}}{2}$	**A**
p_k	**0,1**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,3**

Să calculăm speranţa matematică a funcţiei:

$$\mathbf{M}[A\ sin\varphi] = -A*0,1 - \frac{A\sqrt{2}}{2}0,1 + 0,02 + \frac{A\sqrt{2}}{2}0,3 + A*0,3 =$$

$$= A\,(0,2 + \frac{\sqrt{2}}{2}0,2) = A(0,2 + 0,14) = 0,34 * A$$

Tipuri de aceste probleme se întâlnesc în studiul proceselor vibratoare.

12.Variabile aleatoare continue. Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare continue. Probabilitatea pentru ca o variabilă aleatoare să aparţină unui interval dat.

Pentru a înţelege problema considerăm un exemplu.

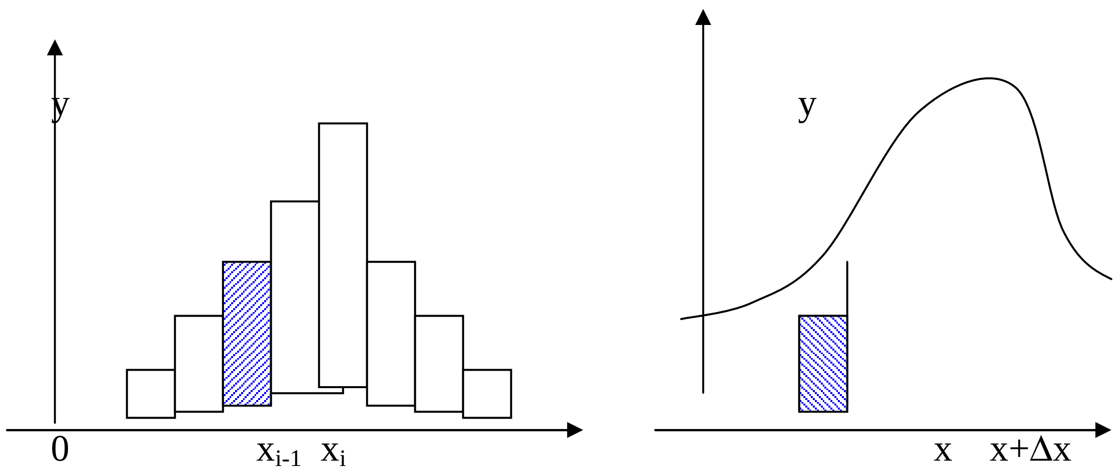
Exemplu: Se măsoară uzura unui cilindru după o anumită perioadă de exploatare. Această mărime este determinată de valoarea de creştere a diametrului cilindrului. O notăm cu ***x.*** Din natura problemei rezultă că această cantitate ***x*** poate să ia toate valorile într-un anumit interval (***a, b***) al valorilor posibile.
O cantitate de acest gen se numeşte *variabila aleatoare continuă.*
Considerăm deci o variabilă aleatoare continuă ***x*** dată în intervalul (***a, b***) care poate fi interval infinit $(-\infty, +\infty)$. Împărţim acest interval cu ajutorul punctelor arbitrare x_0, x_1, … x_n în intervale mici, arbitrare de lungime

$$\mathbf{Ax_{i-1} = x_i - x_{i-1}}$$

Presupunem că, cunoaştem probabilitatea de apartenenţă a variabilei aleatoare ***x*** la intervalul ($\boldsymbol{x_{i-1}}$, $\boldsymbol{x_i}$). Vom nota această probabilitate în felul următor:

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{x_{i-1}} < \bar{x} < \mathbf{x_i})$$

Şi o vom reprezenta sub forma ariei rectangulare de baza $\mathbf{x_{i.}}$ (vezi **fig. 1**)



x

Pentru fiecare interval ($\mathbf{x_{i-1}}$, $\mathbf{x_i}$) se determină probabilitatea ca variabila aleatoare ***x*** să aparţină de acest interval şi în consecinţă se poate construi linia poligonală sau scara.

Definiţia 1. Dacă există o funcţie **y = f(x),** astfel încât:

$$\lim \frac{P(x < \bar{x} < x + \Delta x)}{x} = \mathrm{f}\,(\mathrm{x}) \qquad \textbf{(VII 46)}$$

această funcţie **f(x)** este numită *densitate de distribuţie* a probabilităţilor variabilei aleatoare $\bar{x}$, sau „legea de distribuţie" (sau încă „densitatea de probabilitate").

Vom nota prin $\bar{x}$ variabila aleatoare continuă, prin **x** sau $\mathbf{x_k}$ valoarea acestei variabile aleatoare. Curba **y = f(x)** este numită *curba de distribuţie a* *probabilităţilor*, sau curba de densitate (**fig.2**). Utilizând noţiunea de limită, se obţine plecând de la egalitatea **(VII 45)**.

$$\mathbf{P}\ (x < \bar{x} < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x \qquad \textbf{(VII 47)}$$

Teorema 1. Fie **f(x)** densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $\bar{x}$. Atunci probabilitatea pentru ca valoarea variabilei aleatoare **x** să se găsească într-un anumit interval **(α, β)** este egală cu integrala definită de funcţia ***f(x)*** între limitele **α şi β,** altfel spus avem egalitatea:

$$\mathbf{P}\ (\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \qquad \textbf{(VII 48)}$$

Demonstraţie. Împărţim intervalul **(α, β)** cu ajutorul punctelor ***(α = x₁, x₂ ,…, xₙ₊₁ = β)*** în ***n*** mici intervale (**fig. 3**). Aplicăm fiecărui interval formula **(47):**

$$\mathbf{P}\ (x_1 < \bar{x} < x_2) \approx f(x_1)\Delta x_1$$

$$\mathbf{P}\ (x_2 < \bar{x} < x_3) \approx f(x_2)\Delta x_2$$

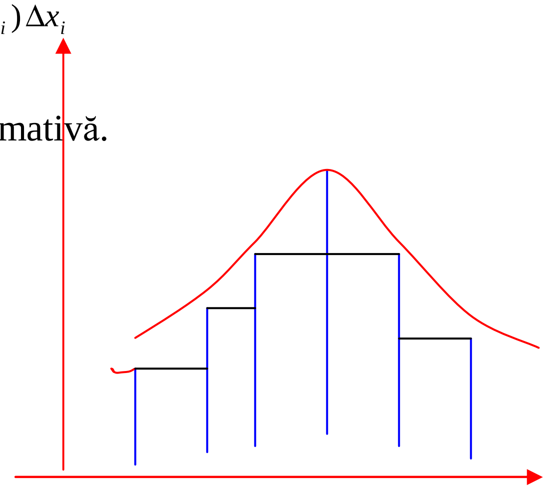
....

$$\mathbf{P}\ (x_n < \bar{x} < x_{n+1}) \approx f(x_n)\Delta x_n$$

Adunăm membrii din partea stângă şi pe cei din parte dreaptă. Este evident că în stânga obţinem **P (α<$\bar{x}$< β).** Astfel:

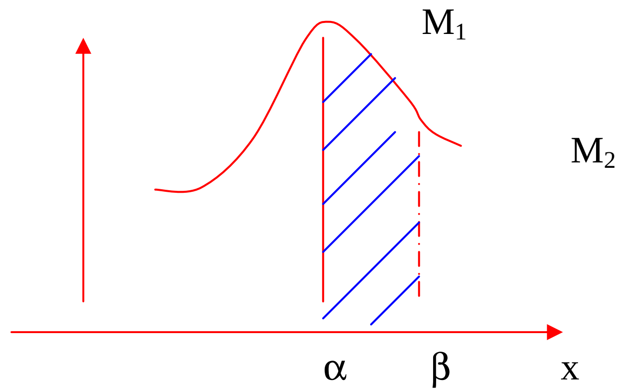
$$\mathbf{P}\ (\alpha < \bar{x} < \beta) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Am obţinut o egalitate aproximativă.



0 $\alpha = x_1$ x_n

$x_{n+1} = \beta$



Trecând la limită în membrul doi când $\mathbf{\Delta x_i \to 0}$ vom obţine, în virtutea proprietăţilor sumelor integrale, că egalitatea exista:

$$\mathbf{P\ (\alpha < \bar{x} < \beta) =} \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

(vom presupune că funcţia **f(x)** este astfel ca limita la dreapta există______00+). Dar limita membrului secund nu este alta decât integrala definită a funcţiei **f(x)** între limitele **α şi β.** Noi avem astfel:

$$\mathbf{P\ (\alpha < \bar{x} < \beta) =} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Teorema este demonstrată.

Vom putea deci, cunoscând densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare, să determinăm probabilitatea pentru ca această variabilă aleatoare să ia valoarea sa în intervalul considerat. Geometric vorbind această probabilitate este egală cu trapezul curbiliniu. (**Fig.4**).

Remarcă. În cursul unei variabile aleatoare continuă, probabilitatea actualizării evenimentului, constând în aceea că $\mathbf{x = x_0}$ **,** va fi nulă.

Într-adevăr, punând egalitatea **(VII 47)** $\mathbf{x = x_0}$ vom obţine:

$$\mathbf{P}\ (\mathbf{x_0} < \bar{x} < \mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\Delta\mathbf{x}$$

de unde

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) = 0$$

sau încă

$$P(x = x_0) = 0$$

Aceasta deoarece în egalitatea **(VII 48),** ca şi în egalităţile precedente putem scrie nu numai:

$$\mathbf{P}\ (\alpha < \bar{x} < \beta), \quad \text{dar si} \quad \mathbf{P}\ (\alpha \le \bar{x} \le \beta),$$

Fiind dată ca:

$$\mathbf{P}\ (\alpha \le \bar{x} \le \beta) = \mathbf{P}\ (\bar{x} = \alpha) + \mathbf{P}\ (\alpha < \bar{x} < \beta) + \mathbf{P}\ (\bar{x} = \beta) = \mathbf{P}\ (\alpha < \bar{x} < \beta)$$

Dacă toate valorile posibile ale variabilei aleatoare ***x*** se găsesc în intervalul (**a, b**), atunci:

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \qquad \textbf{(VII 49)}$$

deoarece se ştie cu certitudine că variabila aleatoare aparţine intervalului (**a, b**).

Dacă intervalul valorilor posibile este ($-\infty, +\infty$), atunci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad \textbf{(VII 50)}$$

Notăm că dacă din desfăşurarea probei rezultă că funcţia **F(x)** este determinată pe intervalul finit **(a, b)** se poate estima că ea este determinată pe tot intervalul infinit
($-\infty, +\infty$), dar că:

$$\mathbf{f(x) = 0}$$

în exteriorul intervalului (**a, b).** În acest caz avem de asemenea egalităţile **(VII 49)** şi **(VII 50).**

Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare defineşte în întregime variabila aleatoare.

13. Funcţia de repartiţie sau legea integrală de distribuţie. Legea de distribuţie uniformă.

Definiţia 1. Fie ***f(x)*** densitatea de probabilitate a unei anumite variabile aleatoare $\bar{x}$ **(**$-\infty < x < +\infty$**)**, atunci funcţia

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad \textbf{(VII 51)}$$

se numeşte *funcţie de repartiţie* sau *lege integrală de distribuţie a probabilităţilor*.

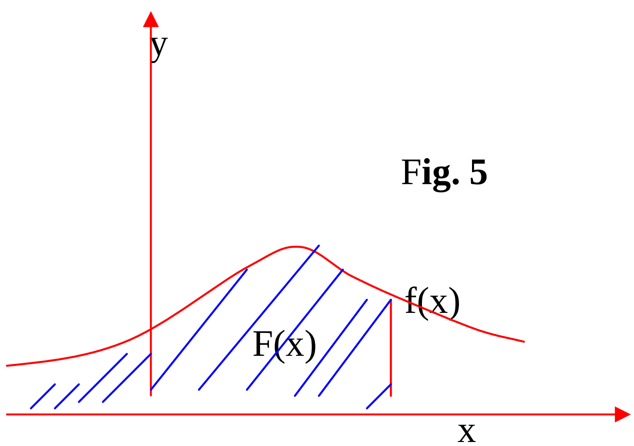


Fig. 5

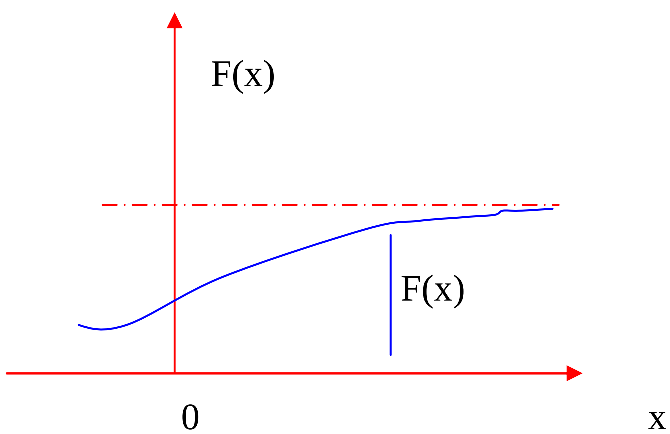


Fig. 6

Pentru o variabilă aleatore discretă, funcţia de repartiţie este egală cu suma probabilităţilor tuturor valorilor sale x_k inferioare la ***x.***

$$\mathbf{F(x)} = \sum_{x_k < x} p_k$$

deci **(48)** rezultă că funcţia de repartiţie este probabilitatea pentru ca variabila aleatoare $\bar{x}$ să ia o valoare inferioara lui ***x*** (fig. 6)

$$\mathbf{F(x) = P(-\infty < \bar{x} < x)} \qquad \textbf{(VII 52)}$$

Se vede pe **fig. 5** că pentru o valoare de la ***x*** valoarea funcţiei de repartiţie este numeric egală cu aria limitată de curba de densitate, situată la stânga ordonatei punctului ***x.***

Graficul funcţiei ***F(x***) este numit curba integrală a distribuţiei (**fig.6**).

Trecând la limită în egalitatea **(VII 51)** şi ţinând seama de **(VII 50)** obţinem:

$$\lim F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Dăm acum demonstraţia următoarei teoreme:

Teorema 1. Probabilitatea ca variabila aleatoare ***x*** să ia o valoare aparţinând intervalului **(α, β)** este egală cu creşterea funcţiei de repartiţie pe acest interval.

$$\mathbf{P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}$$

Demonstraţie. Exprimăm probabilitatea pentru ca variabila aleatoare $\bar{x}$ să se găsească în intervalul **(α, β).** Pentru aceasta scriem formula **(VII 48)** sub forma:

$$\mathbf{P(\alpha < \bar{x} < \beta)} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$$

(conform **fig. 7**). De asemenea, utilizând egalitatea **(VII 51)**

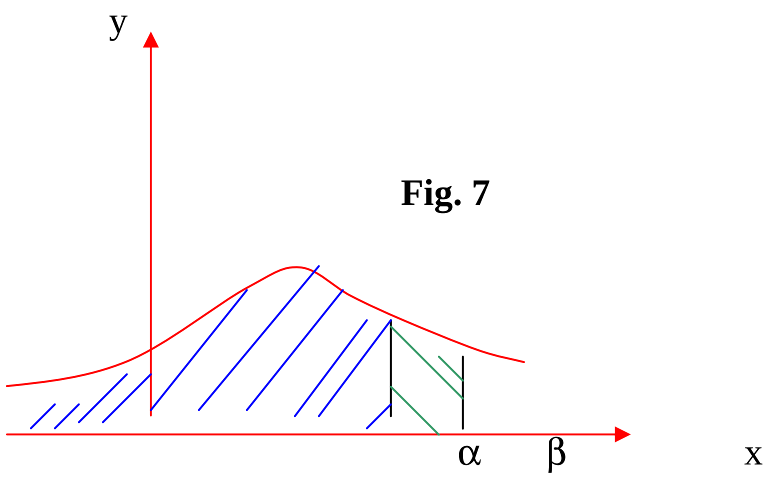


Fig. 7

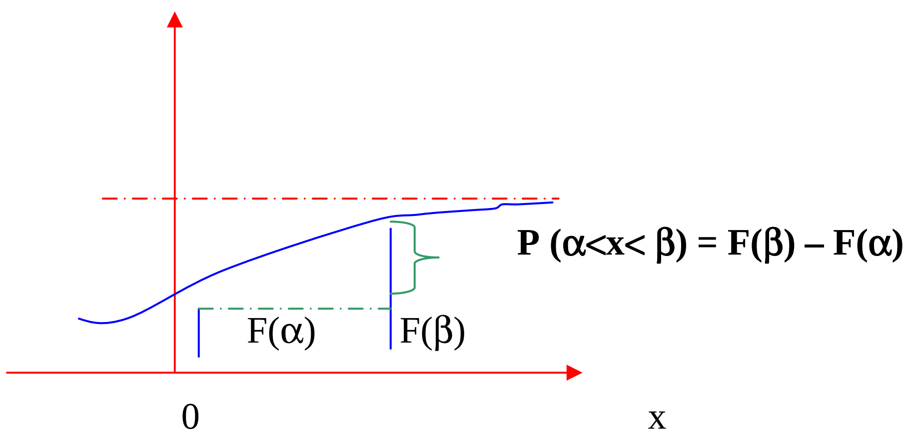


Fig.8

putem să scriem pe **(VII 53)** şi astfel:

$$\mathbf{P\ (\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}$$

ceea ce trebuia demonstrat, (conf. **fig 8**)

Notăm că densitatea de probabilitate **f(x)** şi funcţia de repartiţie corespunzătoare ***F(x)*** sunt legate prin relaţia:

$$F'(x) = f(x) \qquad \textbf{(VII 54)}$$

Aceasta decurge din egalitatea **(51)** şi din teorema de derivare a unei integrale definite în raport cu limita superioară.

Considerăm acum o variabilă aleatoare corespunzând unei legi de distribuţie uniforme. Legea de distribuţie sau densitatea de probabilitate ***f(x)*** a unei astfel de variabile este dată în felul următor:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{pentru } x < a \\ f(x) &= c && \text{pentru } a < x < b \\ f(x) &= 0 && \text{pentru } x > b \end{aligned}$$

Densitatea ***f(x)*** admite pe intervalul (**a, b**) o valoare constantă ***c.*** (fig.9). Ea este nulă în afara acestui interval.

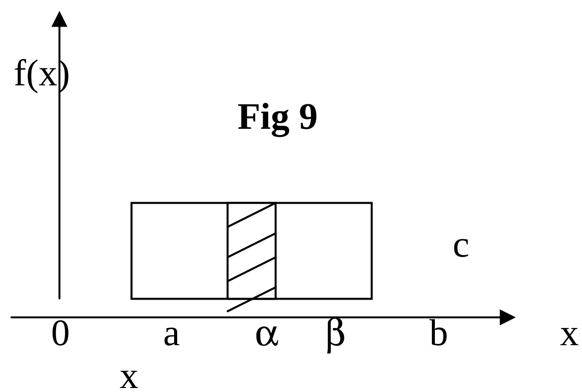


Fig 9

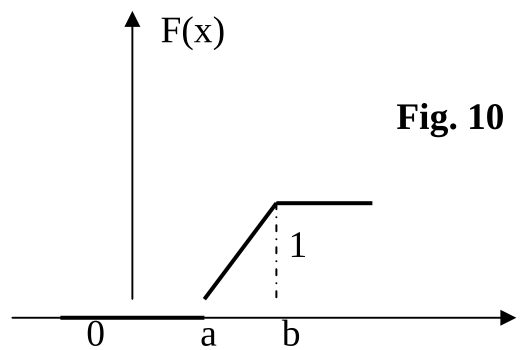


Fig. 10

o astfel de distribuţie se numeşte legea de distribuţie uniformă.

Valoarea lui ***c*** se găseşte utilizând condiţia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

astfel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b c\ dx = c(b-a) = 1$$

şi în consecinţă:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{b-a} \quad ; \quad \mathbf{b - a} = \frac{1}{c}$$

Din ultima egalitate rezultă că intervalul **(*a*, *b*)** pe care este definită distribuţia uniformă este necesar finit. Determinăm probabilitatea pentru ca variabila aleatoare să ia o valoare aparţinând intervalului **(α, β):**

$$\mathbf{P}\ (\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Probabilitatea astfel căutată este:

$$\mathbf{P}\ (\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

(aceasta relaţie este analoagă definiţiei probabilităţii geometrice pentru cazul bidimensional pe care l-am studiat).

Determinăm legea integrală de distribuţie:

$$\boldsymbol{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- dacă **x < a**, atunci **f(x) = 0** şi în consecinţă

$$\mathbf{F(x) = 0}$$

- dacă **a** < **x< b**, atunci **f(x) =** $\frac{1}{b-a}$ şi în consecinţă

$$\mathbf{F(x)} = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$

- dacă **b< x**, atunci **f(x) = 0** şi $\int_b^{\infty} f(x)dx = 0$

şi în consecinţă:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

cf. **fig 10**.

Să dăm exemple concrete de variabile aleatoare distribuite după o lege uniformă.

Exemplul 1. La măsurarea unei mărimi se efectuează o anumită rotunjire până la diviziunea cea mai apropiată a scării. Eroarea comisă în cursul acestei rotunjiri este o

variabilă aleatoare distribuită după o lege uniformă. Dacă **2l** reprezintă numărul de unităţi
într-o diviziune a scării, densitatea de probabilitate a acestei variabile aleatoare va fi:

f(x) = 0 dacă **x < -l**

f(x) = $\frac{1}{2l}$ dacă **-l < x < l**

f(x) = 0 dacă **l < x**

Aici **a = -l ; b = l ; c =** $\frac{1}{2l}$

Exemplul 2. O roată simetrică în rotaţie se opreşte prin frecare. Unghiul θ format de o rază mobilă a roţii cu o rază imobilă după oprirea roţii este o variabilă aleatoare a cărei densitate de probabilitate este:

F(θ) = 0 dacă θ < 0

F(θ) = $\frac{1}{2\pi}$ **dacă 0< θ < 2π**

F(θ) = 0 dacă 2π < θ.

14. Caracteristicile numerice ale unei variabile aleatoare continue.

Considerăm ca şi în cazul unei variabile aleatoare discretă, caracteristicile numerice ale unei variabile aleatoare continui ***x*** de densitate de probabilitate ***f(x).***

Definiţia 1. Se numeşte *speranţa matematică* o variabilă aleatoare continuă ***x*** de densitate de probabilitate ***f(x)*** expresia:

$$\mathbf{M[x]} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx \qquad \textbf{(VII 55)}$$

Dacă variabila aleatoare $\bar{x}$ nu poate să ia valori decât în intervalul finit **[a, b]**, speranţa matematică **M[x]** este dată de formula:

$$\mathbf{M[x]} = \int_{a}^{b} x\, f(x)dx \qquad \textbf{(VII 55')}$$

Se poate considera formula **(VII 55')** ca o generalizare a formulei cunoscută
deja

$$\mathbf{M[x]} = \sum_{x=1}^{n} x_k\, p_k \qquad \textbf{(VII 56)}$$

Într-adevăr descompunem segmentul **[a, b]** în intervalele **(x_{k-1} , x_k).**

Alegem un punct ξ_k în fiecare din aceste intervale. Considerăm variabila aleatoare discretă auxiliară ξ , care poate să ia valorile:

ξ_1 , ξ_2, ……., ξ_k, ……… ξ_n

Presupunem că probabilitatea valorilor corespunzătoare ale variabilei aleatoare discrete să fie:

p_1 , p_2 ,………, p_k ,……….. p_n

$p_1 = f(\xi_1)\Delta x_1$; $p_2 = f(\xi_2)\Delta x_2$, ……, $p_k = f(\xi_k)\Delta x_k$, ….. , $p_n = f(\xi_n)\Delta x_n$

($f(\xi_k)\Delta x_k$ este probabilitatea ca variabila aleatoare continuă ***x*** să ia o valoare aparţinând intervalului (x_{k-1} , x_k). Speranţa matematică a variabilei aleatoare discrete ξ , va fi:

$$M[\xi] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k p_k$$

sau:

$$M[\xi] = \xi_1 f(\xi_1)\Delta x_1 + \xi_2 f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots + \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k + \ldots$$

$$\ldots + \xi_n f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k$$

Trecem la limită când notam $\Delta x_k \to 0$ vom obţine:

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b x f(x)\,dx$$

Expresia membrului doi este speranţa matematică a variabilei aleatoare continue ***x***, care poate să ia orice valoare ***x*** aparţinând segmentului **[a, b]**.

Raţionamentul poate fi reluat în mod analog pentru intervalul infinit, adică pentru expresia **(VII 55)**. Adică formulele **(VII 55)** şi **(VII 55')** sunt analoage lui **(VII 56')**. Pentru speranţa matematica vom utiliza de asemenea notaţia m_x.

Se numeşte speranţa matematica centrul de distribuţie a probabilităţilor variabilei aleatoare ***x***, (***Fig.11***).

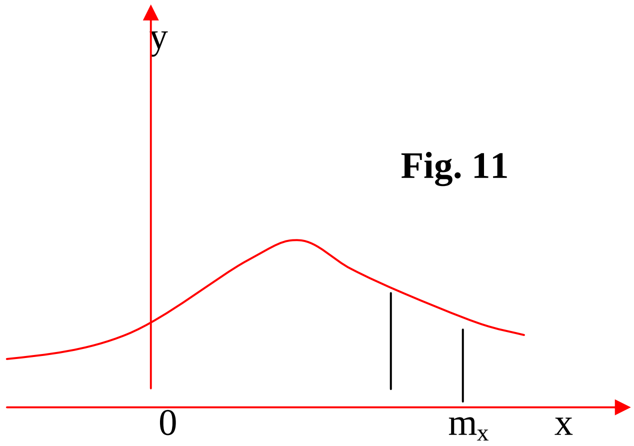


Fig. 11

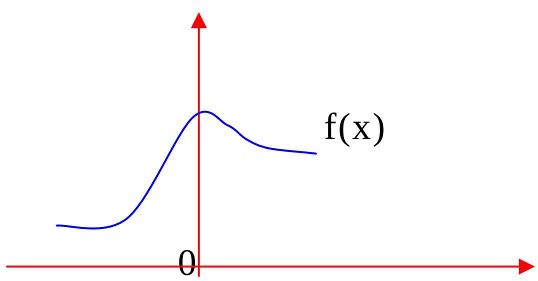


Fig. 12

Dacă curba de distribuţie este simetrică în raport cu axa Oy, altfel spus, dacă funcţia **f(x)** este pară, atunci este evident că:

$$\mathbf{M}[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \mathbf{0}$$

În acest caz centrul de distribuţie coincide cu originea coordonatelor (**Fig.12**). Considerăm variabila aleatoare centrală ***x- m_x***. Vom găsi speranţa sa matematică:

$$\mathrm{M}[\bar{x} - m_x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx - m_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= m_x - m_x * 1 = 0$$

Speranţa matematică a unei variabile aleatoare centrale este nulă.

Definiţia 2. Se numeşte *varianţă* a variabilei aleatoare $\bar{x}$ speranţa matematică a pătratului variabilei aleatoare centrate corespunzătoare:

$$\mathrm{D}[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2\, f(x)dx \qquad \textbf{(VII 57)}$$

Formula **(VII 57)** este analoagă formulei:

$$\mathrm{D[x]} = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2\, p_k$$

Definiţia 3. Se numeşte abatere pătratică medie a variabilei aleatoare ***x*** rădăcina pătratică a varianţei:

$$\sigma\,[\bar{x}] = \sqrt{D[\bar{x}]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2\, f(x)\,dx}$$

Această formulă este analoagă cu formula:

$$\sigma[\mathrm{x}] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2\, p_k}$$

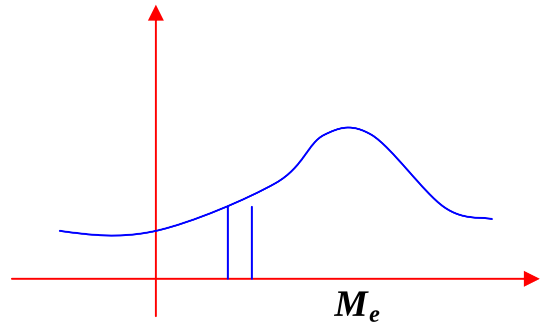
Varianţa şi abaterea pătratică medie caracterizează dispersia valorilor variabilei aleatoare.

Definiţia 4. Valoarea variabilei aleatoare x, pentru care densitatea de probabilitate admite valoarea sa cea mai mare, se numeşte *mod* şi este notată cu $\mathbf{M_0}$. Pentru variabila aleatoare ***x*** a cărei curba de densitate este reprezentată în ***figurile 11*** şi ***12***, *modul coincide cu speranţa matematică.*

Definiţia 5. Se numeşte "*mediana*" şi notăm cu M_e numărul care verifică egalitatea:

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)\,dx = \int_{M_e}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Aceasta ultimă egalitate poate fi pusă sub forma:



$$P(\overline{x} < M_e) = P(M_e < \overline{x}) = \frac{1}{2}$$

altfel spus este de asemenea probabil ca variabila aleatoare ***x*** să ia o valoare inferioară sau superioară lui $\boldsymbol{M_e}$.

Notăm că variabila aleatoare ***x*** poate să nu admită pe $\boldsymbol{M_e}$ ca valoare posibilă.

15. Legea normală de distribuţie (legea lui Gauss). Speranţa matematică a distribuţiei normale.

Studiul unor fenomene variate ne arată că numeroase variabile aleatoare, ca de exemplu eroarea comisă în timpul unei măsurători, mărimea uzurii pieselor a numeroase mecanisme, depărtarea laterală şi depărtarea bătăii punctului de lovire în raport cu un centru, în cursul unei trageri, etc., are o densitate de probabilitate care se exprimă cu ajutorul formulei:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(VII 60)}$$

Se spune în acest caz că variabila aleatoare urmează o lege de distribuţie normală sau o lege Gauss. Curba densităţii legii normale este următoarea:

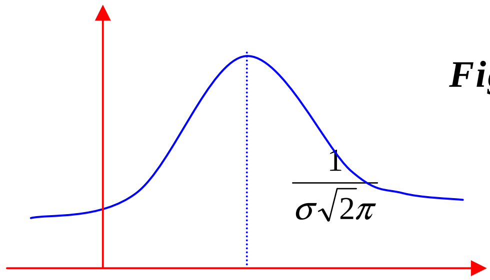


Fig. 14

Există tabele cu valori ale lui ***F(x)*** pentru diferite valori ale lui ***a*** şi **σ.** Noi nu considerăm util să prezentăm aceste tabele.

Vom arăta, pentru început că densitatea de probabilitate **(VII 61)** verifică relaţia fundamentală

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Într- adevăr, introducând notaţia:

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\,\sigma} = t \qquad\qquad dx = \sqrt{2}\,\sigma\,dt$$

putem scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{-\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Să determinăm speranţa matematică a unei variabile aleatoare, distribuită după o lege de forma (60). După înlocuire, obţinem:

$$m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$$

făcând din nou schimbarea de variabile:

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\,\sigma} = t$$

vom obţine:

$$x = a + \sqrt{2}\,\sigma t \quad ; \quad dx = \sqrt{2}\,\sigma\, dt$$

În consecinţă:

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a+\sqrt{2}\,\sigma t)e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2} dt$$

Prima integrală este $\sqrt{\pi}$. Să calculăm a doua integrală. Avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Vom avea astfel în definitiv:

$$m_x = a \qquad \textbf{(VII 62)}$$

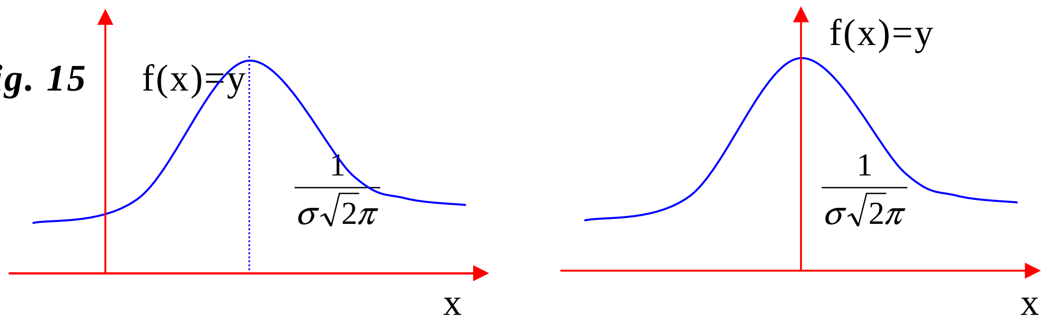
Valoarea parametrului "***a***" care intră în formula **(60)** este egală cu speranţa matematică a variabilei aleatoare considerate. Punctul ***x=0*** este centrul de distribuţie a probabilităţilor sau centrul de dispersie. Funcţia ***f(x)*** admite cea mai mare valoare a sa pentru ***x= a***, în consecinţa valoarea ***x= a*** este de asemenea şi "modul " variabilei aleatoare. Cum curba **(60)** este simetrică în raport cu dreapta ***x= a***, vom avea:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

Altfel spus, valoarea ***x= a*** este mediana distribuţiei normale. Dacă în formula **(60)** luăm ***a= 0***, vom obţine:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(VII 63)}$$

Fig. 15



Curba corespunzătoare lui **f(x)** dată de **(VII 63)** este simetrică în raport cu axa **Oy.** Funcţia **f(x')** este densitatea de distribuţie normală a variabilei aleatoare al cărui centru de distribuţie a probabilităţilor coincide cu originea coordonatelor (***fig.16***). caracteristicile numerice ale variabilelor aleatoare definite de **(VII 60)** şi **(VII 63)** care definesc caracterul distribuţiei valorilor variabilelor aleatoare în raport cu centrul de dispersie, sunt determinate de forma curbei care nu depinde de cantitatea "***a***" şi în consecinţă, dreapta (dacă **a** > **0**) sau spre stânga (dacă **a** < **0**). Pentru a simplifica scrierea, vom conduce raţionamentele ulterioare pentru densitatea de probabilitate definită de **(VII 63)**.

16. Varianţa şi depărtarea pătratică medie a unei variabile aleatoare ce urmează o lege de distribuţie normală.

Fie

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(VII 64)}$$

Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare ***x***. Determinăm varianţa unei variabile aleatoare continue după forma

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \, f(x) dx$$

în cazul nostru

m_x = a Avem:

$$D[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

făcând schimbarea de variabilă:

$\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ = t atunci

$$D[x] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \, 2t \, e^{-t^2} dt$$

Integrând prin părţi, vom obţine:

$$D[x] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \{ te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \}$$

cum

$$\lim_{t \to \infty} t e^{-t^2} = 0 \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Avem în definitiv

$$D[x] = \sigma^2 \qquad \textbf{(VII 65)}$$

Conform definiţiei abaterii pătratice medii avem:

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \sigma$$

Varianţa este astfel egală cu parametrul σ^2 care intră în formula densităţii de probabilitate **(VII 64).**

Am menţionat anterior că varianţa caracterizează dispersia valorilor aleatoare în raport cu centrul de dispersie.

Să vedem cum influenţează valoarea parametrului σ^2 forma curbei de densitate. În figura **(16)** sunt reprezentate curbele de densitate pentru valorile

$\sigma = \frac{1}{2}$; $\sigma = 1$; $\sigma = 2$

Considerând aceste curbe vom vedea că, cu cât σ este mai mare cu atât maximul este mai mic. *Sau cu cât σ este mai mic cu atât dispersia este mai mică.*

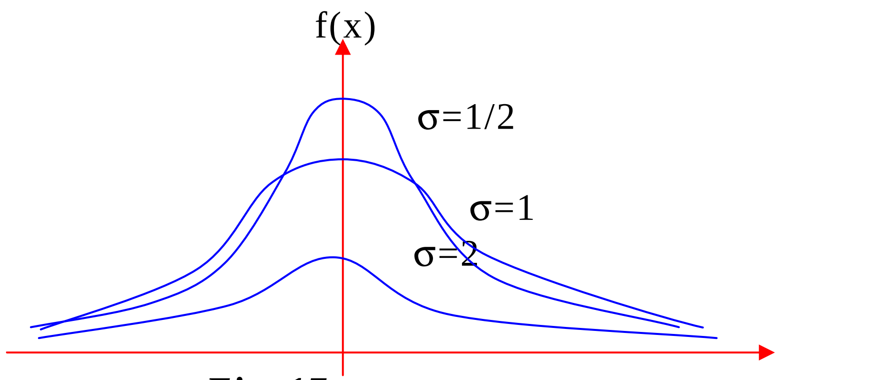


Fig. 17

17. Probabilitatea de apartenenta a unei valori a variabilei aleatoare la un interval dat de funcţia lui Laplace. Funcţia de repartitie a legii normale.

Determinăm în conformitate cu:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

probabilitatea pentru ca valoarea pe care o va lua variabila aleatoare ***x***, de densitate de probabilitate:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x^2-a)^2}{2\sigma^2}}$$

să aparţină intervalului **(α, β)**

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

sau

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x^2-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \textbf{(VII 67)}$$

Facem schimbarea de variabilă:

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\,\sigma} = t$$

Obţinem:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt$$

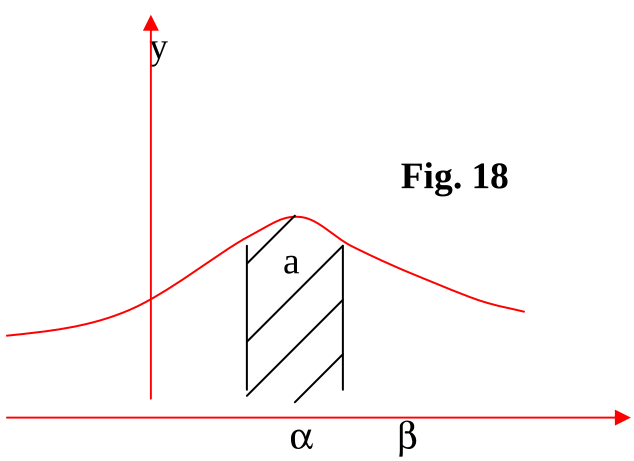


Fig. 18

Integrala care figurează în membrul secund nu se exprimă cu ajutorul unor funcţii elementare. Valorile acestor integrale se exprimă în funcţie de valorile *integralei de probabilitate.*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Indicăm câteva proprietăţi ale funcţiei $\Phi(x)$ pe care o vom utiliza în cele ce urmează:

1. $\Phi(x)$ este definita pentru toate valorile lui x

2. $\Phi(0) = 0$

3. $\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2}$ dt = $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ = 1

4. $\Phi(x)$ este monotona crescatoare in intervalul (0, ∞)

5. $\Phi(x)$ este o functie impara, deoarece

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$

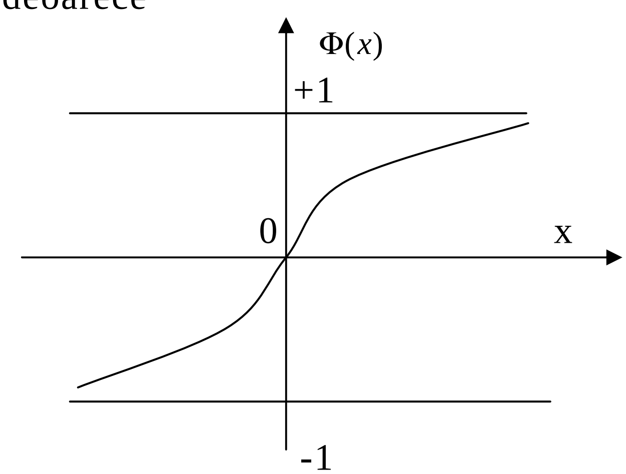


Fig 19

6. Graficul functiei $\Phi(x)$ este reprezentat in figura **19.**

Scriem egalitatea **(67')** utilizând teorema de împărţire a intervalului de integrare:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{0} e^{-t^2}\, dt + \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt + \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt \right]$$

Această ultimă egalitate poate fi pusă sub forma:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt \right]$$

Utilizând funcţia **ϕ(x)** definită de **(VII 68)** vom putea exprima, în definitiv, probabilitatea pentru ca variabila aleatoare ***x*** distribuită conform unei legi normale să ia o valoare ce aparţine intervalului **(α, β):**

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

pentru **a = 0** obţinem:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

Egalând membrii doi ai egalităţii **(VII 67)** pentru **a = 0** şi al egalităţii **(VII 70),** vom obţine:

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right].$$

Se calculează de obicei probabilitatea ca valoarea variabilei aleatore să se găsească în intervalul **(a- l, a+ l)**, simetric în raport cu punctul **x = a**.

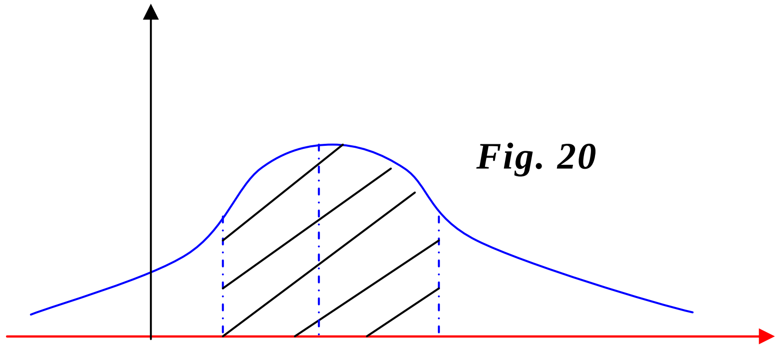
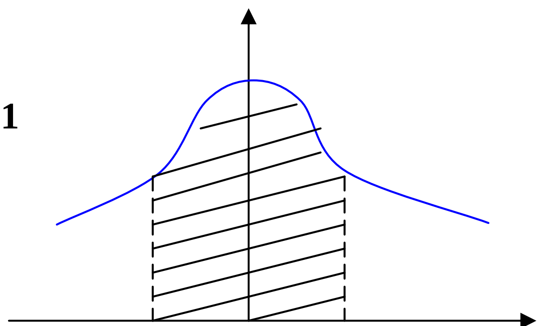


Fig. 20

Fig. 21



În acest caz formula **(VII 69)** devine:

$$P(a - l < \bar{x} < a + l) = \frac{1}{2}[\Phi(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{-l}{\sigma\sqrt{2}})]$$

şi ţinând seama de faptul că:

$$\Phi(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}) = -\Phi(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}})$$

obţinem:

$$P(a - l < \bar{x} < a + l) = \Phi(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}})$$

Membrul secund nu depinde de poziţia centrului de dispersie, deci, pentru **a= 0** obţinem:

$$P(-l < \bar{x} < l) = \Phi(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}})$$

Exemplul 1. Variabila aleatoare x este distribuită după o lege normală, de centru de dispersie a= 0,5 şi varianţa $\sigma^2 = \frac{1}{8}$. Să se determine probabilitatea pentru ca valorile variabilei aleatoare să se găsească în intervalul (0,4; 0,6).

Soluţie: Aici $\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ deci $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 2$ şi conform formulei

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\,\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

obţinem:

$$P(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = \frac{1}{2}\,\{\Phi[2(0{,}6 - 0{,}5)] - \Phi[2(0{,}4 - 0{,}5)]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\{\Phi(0{,}2) - \Phi(-0{,}2)\}$$

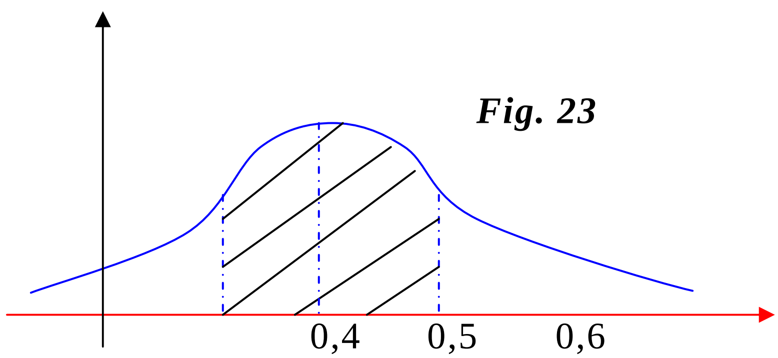


Fig. 23

Dar ţinând seama că $\Phi(-0{,}2) = -\Phi(0{,}2)$ avem:

$$P(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = \frac{1}{2}\,[\Phi(0{,}2) + \Phi(0{,}2)] = \Phi(0{,}2)$$

care este $\Phi(0{,}2) = 0{,}223$

Deci:

$$P(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = 0{,}223$$

Exemplul 2. Lungimea unei piese fabricate de o mărime automatică este o variabilă aleatoare distribuită după o lege normală (Gauss) de parametrii:

$$\mathbf{M[x] = 10;\ \sigma^2 =} \ \frac{1}{200}$$

Să se găsească probabilitatea rebutului, dacă dimensiunile admisibile ale piesei trebuie să fie **10 ± 0,05.**

Soluţie. În cazul nostru avem:

$$M[\bar{x}] = a = 10;\ \ \sigma = \frac{1}{10\sqrt{2}} \quad \text{si} \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 10$$

Probabilitatea rebutului se exprimă deci, conform formulei **(69)** astfel:

$$p_{reb} = 1 - P(9,95 < \bar{x} < 10,5) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\{\Phi[10(10,05-10)] - \Phi[10[9,95-10]]\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\{\Phi(0,5) - \Phi(-0,5)\} = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,52 = 0,48$$

Remarcă. Se utilizează destul de des în locul funcţiei

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

funcţia lui Laplace:

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \qquad \textbf{(VII 74)}$$

Această funcţie Laplace este legată de funcţia $\Phi(x)$ printr-o relaţie simplă.

Efectuând în integrala **(VII 68)** schimbarea de variabilă

$$\frac{t}{\sqrt{2}} = z$$

obţinem:

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz \ = \ \frac{1}{2}\Phi(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

Avem astfel

$$\overline{\Phi}(x) \ = \ \frac{1}{2}\Phi(\frac{x}{\sqrt{2}}) \qquad \textbf{(VII 75)}$$

şi evident:

$$\overline{\Phi}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\Phi(x) \qquad \textbf{(VII 76)}$$

Putem pune formula **(VII 70),** utilizând funcţia $\overline{\Phi}(x)$ din relaţia **(VII 74)**, sub forma:

$$P(\alpha < \overline{x} < \beta) = \overline{\Phi}(\frac{\beta}{\sigma}) - \overline{\Phi}(\frac{\alpha}{\sigma})$$

Şi pentru $\sigma = 1$

$$P(\alpha < \overline{x} < \beta) = \overline{\Phi}(\beta) - \overline{\Phi}(\alpha)$$

Să determinăm acum funcţia integrală a legii de distribuţie normală. Avem:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \ P(-\infty < \overline{x} < x)$$

Utilizând formula **(4)** pentru cazul **$\alpha = -\infty$; $\beta = x$,** obţinem:

$$F(x) = \frac{1}{2}[\Phi(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}) - \Phi(-\infty)]$$

dar $\Phi(-\infty) = -1$

in consecinţă, obţinem:

$$F(x) = \frac{1}{2}[\Phi(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}) + 1]$$

Graficul funcţiei **F(x)** pentru **a = 0** este cel din figura alăturată

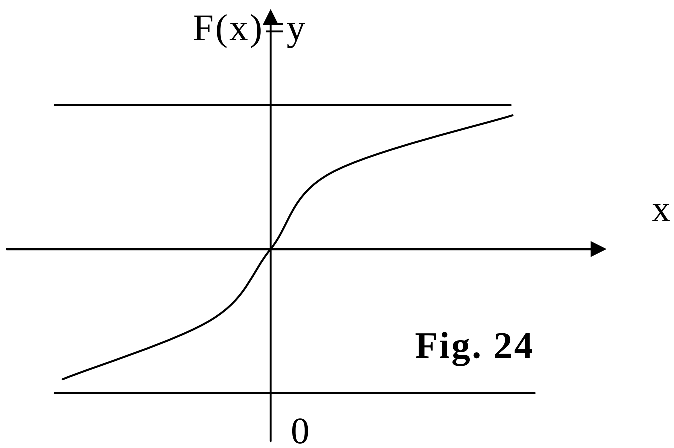


Fig. 24

18. Eroarea mediană

În numeroase aplicaţii ale teoriei probabilităţilor, în particular în teoria erorilor de observare, teoria tragerilor etc se utilizează o caracteristică de dispersie pe care o numim *eroare mediană*.

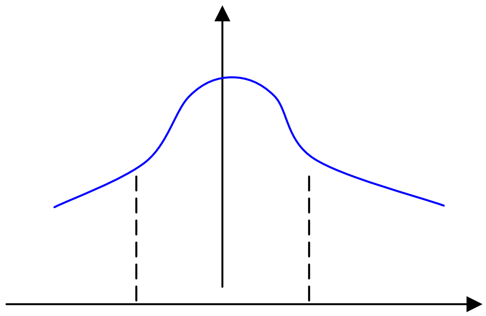
Definiţia 1. Se numeşte *eroare mediană* un număr **E** astfel ca probabilitatea ca variabila aleatoare (eroarea de exemplu) care este distribuită după o lege normală:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

să aparţină intervalului **(- E, E),** să fie egală cu $\frac{1}{2}$ (vezi **figura 25**) altfel spus:

$$\mathbf{P(-E < \bar{x} < E)} = \frac{1}{2}$$

Fig 25



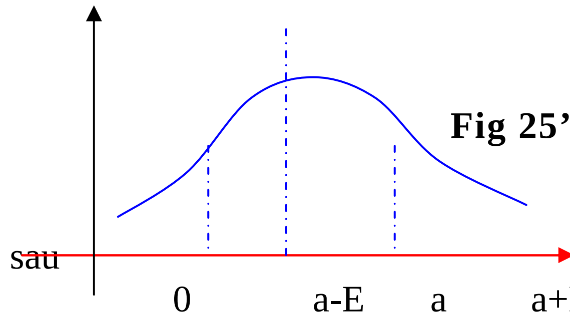


Fig 25'

Dacă centrul de distribuţie este **x= a** atunci **P (a- E< x< a+ E) =** $\frac{1}{2}$

Exprimăm abaterea (eroarea) pătratică medie **σ** în funcţie de eroarea mediană **E**. Primul termen al egalităţii **(78)** poate fi exprimat în funcţie de **ϕ(x):**

$$\mathbf{P(-E < \bar{x} < E) =} \int_{-E}^{E} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Dar conform formulei **(73)** avem:

$$\mathbf{P(-E < \bar{x} < E) =} \Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

deci

$$\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Din tabloul valorilor funcţiei **ϕ(x)** vom găsi argumentul **x= 0,4769** pentru care **ϕ(x)=** $\frac{1}{2}$**.** Deci

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}} = \mathbf{0{,}4769} = \rho \qquad \textbf{(VII 82)}$$

deci:

$$\begin{cases} E = \rho\sqrt{2}\sigma \\ \sigma = \dfrac{E}{\rho\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \textbf{(VII 83)}$$

19. Expresia legii normale in funcţie de eroarea mediana. Funcţia Laplace redusa.

Exprimând parametrul **σ** în funcţie de parametrul **E** cu ajutorul lui **(VII 83)** şi înlocuind valoarea acestuia în :

$$\mathbf{f(x) =} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

obţinem expresia legii normale în funcţie de eroarea mediană:

$$\mathbf{f(x) =} \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E^2}} \qquad \textbf{(VII 84)}$$

Probabilitatea pentru ca variabila aleatoare (de exemplu eroarea de măsurare) să aparţină intervalului **(α, β),** vor fi, în conformitate cu (70)

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2} [\, \Phi(\rho\frac{\beta}{E}) - \Phi(\rho\frac{\alpha}{E}) \,] \qquad \textbf{(VII 85)}$$

şi în conformitate cu formula (72)

$$P(- l < \bar{x} < l) = \Phi(\rho\frac{l}{E}) \qquad \textbf{(VII 86)}$$

Numerele $\frac{\beta}{E}$ şi $\frac{\alpha}{E}$ ce figurează în membrul secund al formulei **(85)** sunt definite de natura problemei considerate, ρ este un număr cunoscut:

$$\boldsymbol{\rho = 0,\ 4769.}$$

Pentru a evita înmulţirea de fiecare dată prin ρ au fost făcute tabele pentru funcţia Φ**(ρx).** Aceasta funcţie este notată prin $\hat{\Phi}$**(x).**

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \Phi(\boldsymbol{\rho}\mathbf{x}) \qquad \textbf{(VII 87)}$$

Functia $\hat{\Phi}$**(x)** se numeste *functia redusa Laplace.*

În virtutea formulei **(VII 68)** această funcţie este definită prin integrala:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho x} e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$$

făcând schimbarea de variabilă **t= ρz** obţinem:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-\rho^2 z^2}\,\mathrm{dz} \qquad \textbf{(VII 88)}$$

Exprimând membrul secund al egalităţii **(85)** cu ajutorul funcţiei Laplace reduse obţinem:

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E}\right)\right] \qquad \textbf{(VII 89)}$$

În particular, probabilitatea pentru ca valoarea variabilei aleatoare să se găsească într-un interval simetric în raport cu centrul de dispersie **(-l, +l)**, este dată în virtutea formulei **(VII 86)**, de expresia:

$$\mathrm{P}(-\,l < \bar{x} < l) = \hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right) \qquad \textbf{(VII 90)}$$

si

$$P(\,0 < \bar{x} < l) = \frac{1}{2}\hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right) \qquad \textbf{(VII 91)}$$

Notăm că probabilitatea pentru ca valoarea variabilei aleatoare **x** să aparţină intervalului **(α, β),** exprimată cu ajutorul erorii mediane **E**, dacă speranţa matematică **a ≠ 0** vor fi conform cu **(VII 89)**

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\,\Phi\left(\rho\frac{\beta - a}{E}\right) - \Phi\left(\rho\frac{\alpha - a}{E}\right)\right]$$

Această ultimă egalitate poate să se exprime cu ajutorul funcţiei Laplace reduse în felul următor:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\,\hat{\Phi}\left(\frac{\beta - a}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha - a}{E}\right)\right]$$

20. Regula celor 3 *sigma*.
Scara probabilităţilor de distribuţie a erorilor.

Pentru efectuarea practică a calculelor se alege ca unitate de măsură abaterea pătratică medie σ pentru eroarea unei variabile aleatoare de lege de distribuţie normală faţă de centrul de dispersie (de speranţa matematică).
Se obţine atunci, în virtutea formulei **(VII 73)**, egalităţi ce sunt de foarte mare utilitate în calcule:

$$P(-\sigma < \bar{x} < \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}683$$

$$P(-2\sigma < \bar{x} < 2\sigma) = \Phi(\sqrt{2}) = 0{,}954$$

$$P(-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}997 \approx 1$$

O imagine geometrică a acestor rezultate este dată pe figura alăturată.

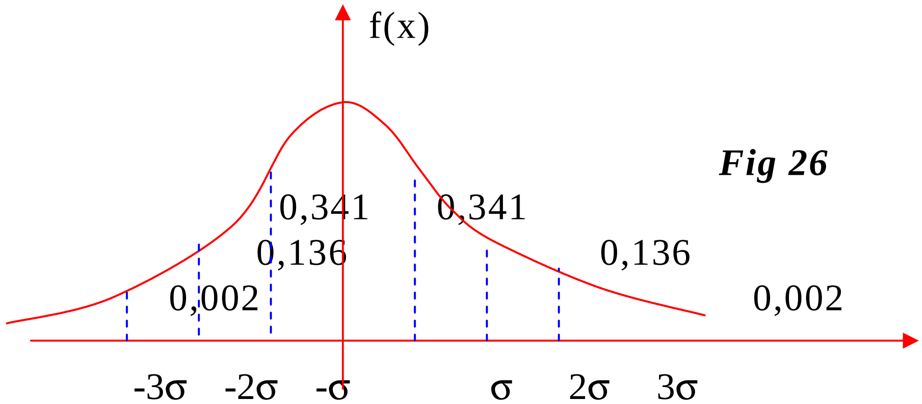


Fig 26

Rezultă deci pentru o anumită variabilă aleatoare, eroarea nu se îndepărtează în valoare absolută de speranţa matematică mai mult de **3 σ.** Aceasta propoziţie este denumită *regula celor 3 sigma*.

Pentru tratarea diverselor date statistice este util să se cunoască probabilitatea pentru ca variabila aleatoare ***x*,** să aparţină intervalelor **(0, E);** **(E, 2E) ; (2E, 3E) ; (3E, 4E) ; (4E, 5E)** dacă densitatea de probabilitate corespunzătoare este dată de formula **(84)**. Cunoaşterea acestei probabilităţi permite, în numeroase cazuri, reducerea calculelor şi facilitarea analizei fenomenelor.

Pentru calcularea acestor probabilităţi vom utiliza formula **(VII 91)** şi tabloul funcţiei $\hat{\Phi}$**(x):**

$$P(\, 0 < \bar{x} < E\,) = \frac{1}{2}\hat{\Phi}(1) = 0{,}2500$$

$$P(\, E < \bar{x} < 2E\,) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(2) - \hat{\Phi}(1)] = 0{,}1613$$

$$P(\, 2E < \bar{x} < 3E\,) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(3) - \hat{\Phi}(2)] = 0{,}0672$$

$$P(\, 3E < \bar{x} < 4E\,) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(4) - \hat{\Phi}(3)] = 0{,}0180$$

$$P(\, 4E < \bar{x} < \infty\,) = \frac{1}{2}[\hat{\Phi}(\infty) - \hat{\Phi}(4)] = \frac{1}{2}[1 - 0{,}9930] = 0{,}0035$$

Rezultatele calculelor sunt ilustrate geometric pe figura alăturată pe care o numim scara de dispersie a erorilor.

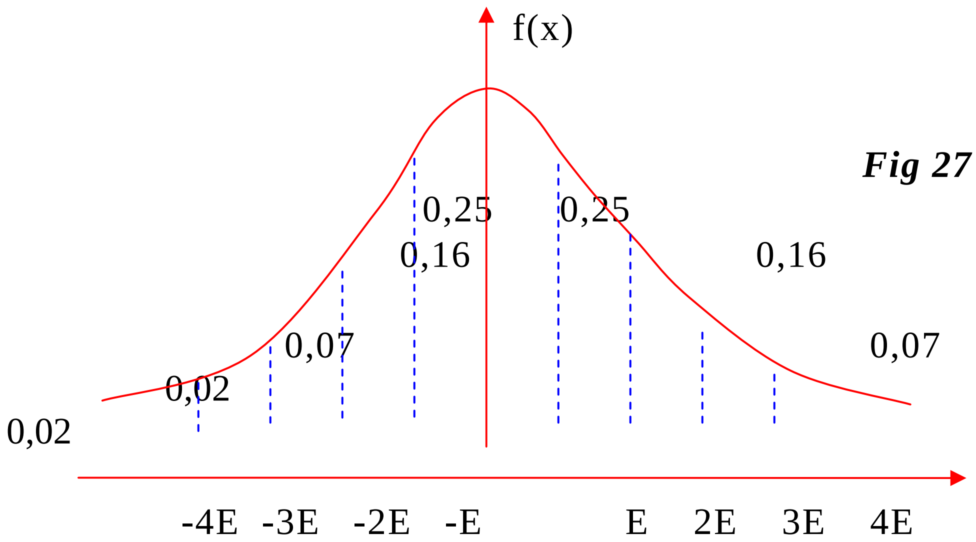


Fig 27

Rezultă din aceste calcule, că este practic cert că valoarea variabilei aleatoare aparţine intervalului **(-4E, 4E).** Probabilitatea pentru ca variabila variabilei aleatoare să se găsească în afara acestui interval este mai mică ca **0,01**.

Exemplu. S-a stabilit experimental că eroarea de măsurare a unui aparat de măsurare a distanţelor este distribuită după o lege normala de eroare mediană E = 10m. Să se determine probabilitatea cu care distanţa măsurată de acest aparat se îndepărtează de distanţa reală 15 m.

Soluţie. În cazul nostru l = 15m, E= 10m. cu ajutorul formulei **(VII 90)**:

$$P(-15< \bar{x} <15) = \hat{\Phi}(\frac{15}{10}) = \hat{\Phi}(1{,}5) = 0{,}6883 \approx 0{,}69$$

21. Eroarea aritmetica medie

Se introduce, pentru caracterizarea erorilor, noţiunea de *eroare aritmetică medie*, egală cu speranţa matematică a valorii absolute a erorilor. Vom nota eroarea aritmetică medie cu **d**. Determinăm eroarea aritmetică medie dacă ***x*** este distribuită după o lege normală de forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

După o formulă analoagă formulei **(VII 61) (a= 0**) obţinem:

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

Astfel eroarea aritmetică medie se exprimă în funcţie de eroarea pătratică medie **σ** cu ajutorul expresiei:

$$d = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

22. Măsura de precizie. Relaţii între caracteristicile de distribuţie a erorilor.

În studiul a numeroase procese, se scrie densitatea de probabilitate a legii normale sub forma:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \qquad \textbf{(VII 75)}$$

Comparând **(75)**cu **(60)** pentru **a= 0 s**e observa că

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \qquad \textbf{(VII 76)}$$

Cantitatea ***h*** este invers proporţională cu **σ**, altfel spus, invers proporţională cu abaterea (eroarea) pătratică medie. Dacă varianţa σ^2 este mică, adică dispersia este mică, atunci ***h*** este mare. Pentru aceasta ***h*** se numeşte *măsură a preciziei*.

Din **(76)** avem:

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

(VII 77)

dar

$$d = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad \textbf{(VII 78)}$$

dar de asemenea

$$\mathbf{E} = \rho\sqrt{2}\sigma = \frac{\rho}{h}. \qquad \textbf{(VII 79)}$$

Câteodată este necesar să se exprime o caracteristică de dispersie a erorilor în funcţie de alta. Iată de ce egalităţile următoare sunt necesare:

$$\frac{E}{\sigma} = \rho\sqrt{2} = 0{,}6745;$$

$$\frac{E}{d} = \rho\sqrt{\pi} = 0{,}8453;$$

$$\frac{\sigma}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533 \qquad \textbf{(VII 80)}$$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} = 1.4826; \qquad \frac{d}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} = 1{,}1829;$$

23. Variabila aleatoare bidimensionala

Valoarea unei variabile aleatoare bidimensionale este determinată de două numere ***x*** şi ***y***; pentru această variabilă aleatoare cu două dimensiuni vom utiliza notaţia $\bar{x}$, $\bar{y}$.Presupunem că $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ ca valorile discrete x_i şi y_i. Presupunem că la fiecare cuplu de valori (x_i, y_i) ce aparţine la un anumit ansamblu, îi corespunde o probabilitate determinată P_{ij}.

Tabloul de distribuţie al probabilităţilor variabilei aleatoare cu două dimensiuni discrete este:

$\bar{y}$ \ $\bar{x}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	…	…	$\mathbf{x_n}$
$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{p_{11}}$	$\mathbf{p_{21}}$	$\mathbf{p_{31}}$	…	$\mathbf{p_{n1}}$
$\mathbf{y_2}$	$\mathbf{p_{12}}$	$\mathbf{p_{22}}$	…	…	$\mathbf{p_{n2}}$
…	…	…	…	…	…
$\mathbf{y_m}$	$\mathbf{p_{1m}}$	$\mathbf{P_{2m}}$	…	…	$\mathbf{p_{nm}}$

Este evident că trebuie să avem egalitatea

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Definim acum variabila aleatoare cu două dimensiuni continui. Probabilitatea pentru ca valoarea variabilei aleatoare bidimensionale (***x, y***) să verifice inegalităţile:

$$\mathbf{x} < \bar{x} < \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \qquad \mathbf{y} < \bar{y} < \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y},$$

va fi notată astfel:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x} < \bar{x} < \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\ ;\ \ \mathbf{y} < \bar{y} < \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}),$$

Definiţia 1. Funcţia ***f(x, y)*** se numeşte *densitate de probabilitate*, a variabilei aleatoare bidimensionale($\bar{x}, \bar{y}$) dacă avem egalitatea aproximativ oarecare:

$$\mathbf{P(x < \bar{x} < x+ \Delta x;\quad y < \bar{y} < y+ \Delta y) \approx f(x, y)\Delta x\Delta y} \qquad \textbf{(VII 82)}$$

Formula (**2**) este analoagă formulei:

$$\mathbf{P(x< \bar{x} < x+ \Delta x) \approx f(x)\Delta x}$$

pentru o singură dimensiune.

Considerăm un sistem rectangular de coordonate (**x, 0y**). Dacă reprezentăm valorile variabilei aleatoare (***x, y***) prin punctele planului corespunzător lui ***x*** şi ***y*** expresia:

$$\mathbf{P(x< \bar{x} < x+ \Delta x;\quad y< \bar{y} < y+ \Delta y)}$$

va reprezenta probabilitatea pentru ca variabila aleatoare bidimensionala (***x, y***) să ia o valoare corespunzătoare unui punct aparţinând dreptunghiului haşurat.

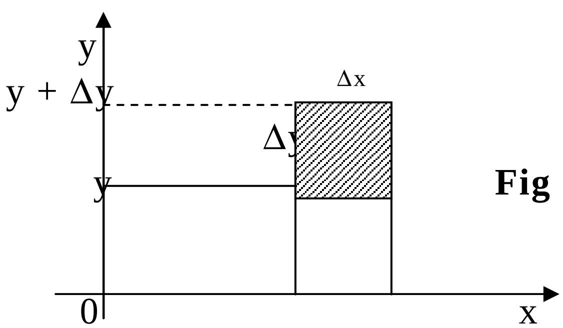


Fig 28

Vom spune astfel că valoarea variabilei aleatoare “cade în domeniul **ΔS**”. De aceea ***x*** se mai notează şi astfel:

$$\mathbf{P(x< \bar{x} < x+ \Delta x;\quad y< \bar{y} < y+ \Delta y)} \text{ cu } \mathbf{P(\bar{x}, \bar{y} \subset \Delta S)} \qquad \textbf{(VII 83)}$$

Cu această notaţie relaţia **(VII 82)** se scrie sub forma:

$$\mathbf{P(\bar{x}, \bar{y} \subset \Delta S) \approx f(x, y)\Delta S}$$

Teorema 1. Probabilitatea **P[(x,y) ⊂ D]** pentru ca variabila aleatoare bidimensională (***x, y***) de densităţi de probabilitate **f(x, y)** să aparţină domeniului **D**, se exprimă cu ajutorul unei integrale duble a funcţiei **f(x, y)** de domeniul **D**, altfel spus

$$\mathbf{P}[(\bar{x},\bar{y}) \subset \mathbf{D}] = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \textbf{(VII 84)}$$

Demonstraţie: Împărţim domeniul **D**, aşa cum se face în studiul integralelor duble, în suprafeţe elementare **S**. Pentru fiecare suprafaţă elementară, scriem egalitatea **(VII 83)** şi însumăm cei doi membri ai egalităţii obţinute. Fiind dat:

$$\sum \Delta S = D \quad \text{şi} \quad \sum P\ [(\bar{x},\bar{y}) \subset \Delta S] = \mathbf{P}[(\bar{x},\bar{y}) \subset \mathbf{D}]$$

vom obţine o egalitate aproximativă:

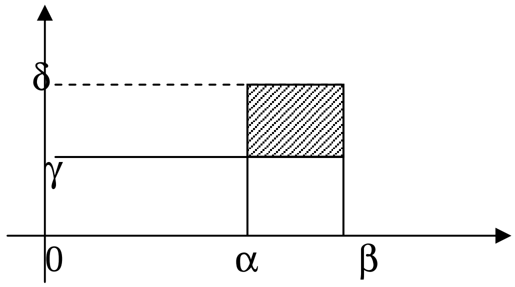
$$\mathbf{P}[(\bar{x},\bar{y}) \subset \mathbf{D}] \approx \mathbf{f(x, y)\Delta S}$$

Trecând la limită în membrul secund a acestei ultime egalităţi, vom obţine în membrul secund o integrală dublă în virtutea proprietăţilor numerelor integrale astfel:

$$\mathbf{P}[(\bar{x},\bar{y}) \subset \mathbf{D}] = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorema este demonstrată.

Remarca 1. Dacă domeniul **D** este dreptunghi limitat de dreptele
x = α, x=β, y = γ, y = δ, atunci:



$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta;\quad \gamma < \bar{y} < \delta) = \int_{\beta}^{\alpha}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \textbf{(VII 85)}$$

Remarca 2. De asemenea, din egalitatea **1** avem egalitatea:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

deoarece faptul ca o variabilă aleatoare bidimensională să ia o valoare oarecare

este un eveniment cert. Acolo unde funcţia **f(x, y)** nu este definită, vom pune
f(x, y) = 0.

Dacă domeniul **D** se compune din mai multe dreptunghiuri de forma din figura:

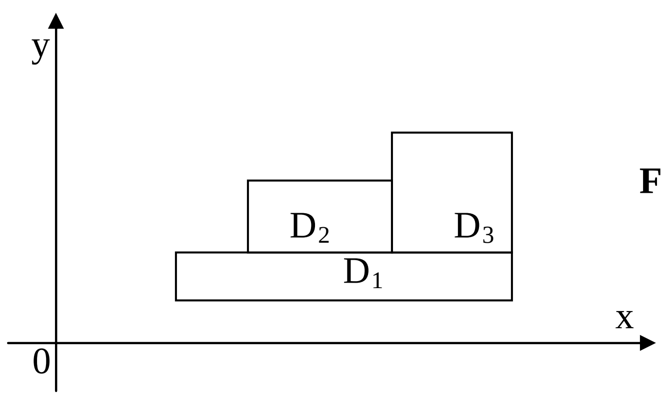


Fig. 29

probabilitatea pentru ca variabila aleatoare să aparţină unui astfel de domeniu este determinată ca sumă a probabilităţilor calculate pentru fiecare din dreptunghiuri, altfel spus, ca suma a integralelor definite de-a lungul fiecărui domeniu dreptunghiular.

$$\mathbf{P[(x,\ y) \subset D]} = \mathbf{P[(}\bar{x}, \bar{y}\mathbf{)} \subset \mathbf{D_1]} + \mathbf{P[(}\bar{x}, \bar{y}\mathbf{)} \subset \mathbf{D_2]} + \mathbf{P[(}\bar{x}, \bar{y}\mathbf{)} \subset \mathbf{D_3]}$$

Exemplu. Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare bidimensionale este dată de formula:

$$f(x,\ y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)\cdot(1+y^2)}$$

Să se determine probabilitatea pentru ca valoarea variabilei aleatoare să aparţină dreptunghiului limitat de dreptele **x= 0, x= 1, y =** $\frac{1}{\sqrt{3}}$**, y =** $\sqrt{3}$

Soluţie. În virtutea formulei **(VII 85)** obţinem

$$\mathbf{P(}0 < \bar{x} < 1;\quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{y} < \sqrt{3}\mathbf{)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\ \mathbf{arctg\ x}\Big|_1^0\ \mathbf{arctg\ y}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\mathbf{(}\frac{\pi}{4}-0\mathbf{)(}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\mathbf{)} = \frac{1}{24}.$$

Definiţia 2. Funcţia

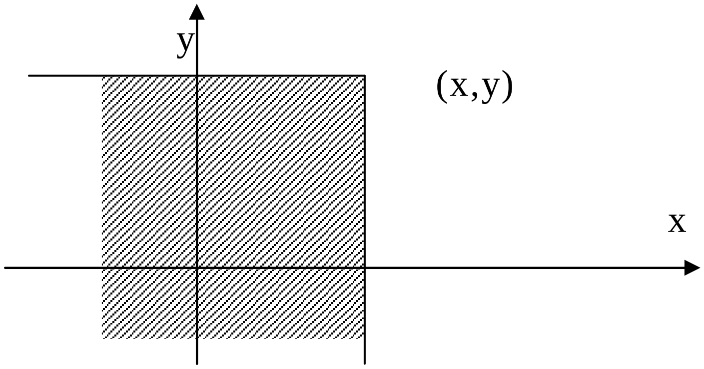
$$\mathbf{F(x,\ y)} = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv \qquad \mathbf{(VII\ 87)}$$

se numeşte funcţie de repartiţie a variabilei aleatoare bidimensionale$(\bar{x}, \bar{y})$.

Este evident că funcţia de repartiţie exprimă probabilitatea pentru ca (x $<\bar{x}$; $\bar{y}$ < y), altfel spus:

$$\mathbf{F(x,\ y) = P(}x < \bar{x},\ \bar{y} < y\mathbf{)}$$

Geometric vorbind, funcţia de repartiţie exprimă probabilitatea pentru ca variabila aleatoare bidimensională să aparţină patrulaterului haşurat pe figura



Utilizând teorema de derivare a unei integrale se găseşte relaţia dintre funcţia de repartiţie şi densitatea de probabilitate

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\infty}^{y} f(x, v)\, dv$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \mathrm{f(x, y)}$$

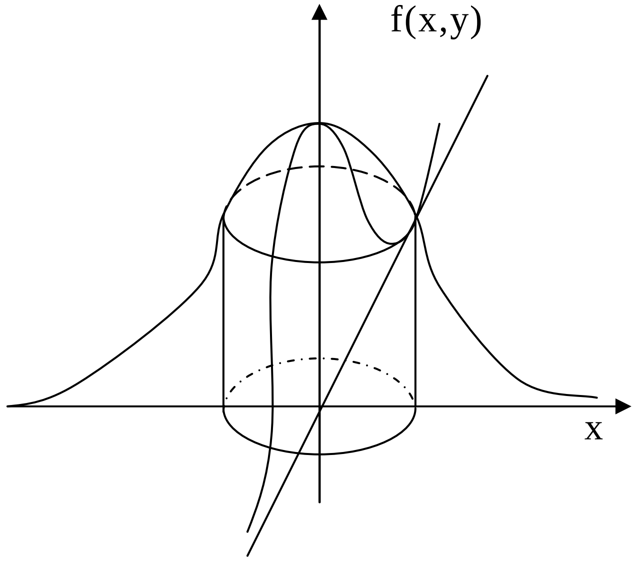
Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare bidimensionale este egală cu derivata mixtă de ordinul doi a funcţiei de repartiţie.

24. Legea normală de distribuţie pe un plan.

Definiţia 1. Distribuţia variabilei aleatoare bidimensionale se numeşte normală dacă densitatea de probabilitate corespunzătoare acestei variabile aleatoare are ca expresie:

$$\mathrm{f(x,y)} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

Graficul acestei funcţii este următorul:



Centrul de dispersie al variabile aleatoare a cărei lege este dată de **(VII 89**) este punctul **(0,0).** Dacă centrul de dispersie este situat în punctul **(a, b)** atunci legea de distribuţie este:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}$$

Valorile σ_x si σ_y se numesc *abateri pătratice medii principale.*

Scriem formula **(VII 89)** sub forma:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \qquad \textbf{(VII 90)}$$

Se poate de asemenea considera **f(x, y)** ca produsul densităţilor a două variabile aleatoare ***x*** şi ***y*** distribuite după o lege normală. Determinăm, de asemenea, ca şi în cazul unei variabile aleatoare cu o singură dimensiune, abaterile probabile principale $\mathbf{E}_{\boldsymbol{x}}$ şi $\boldsymbol{E_y}$, ale variabilei aleatoare cu două dimensiuni. Cum

$$E = \rho\sqrt{2}\,\sigma$$

avem:

$$E_x = \rho\sqrt{2}\,\sigma_x \quad \text{si} \quad E_y = \rho\sqrt{2}\,\sigma_y \qquad \textbf{(VII 91)}$$

Înlocuind în formula **(89)** valorile lui σ_x si σ_y din **(91)** obţinem:

$$f(x,y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)} \qquad \textbf{(VII 92)}$$

Considerăm liniile de nivel ale suprafeţei **(93)**.

$$\frac{x^2}{Ex^2} + \frac{y^2}{Ey^2} = k^2 \text{ - o constanta.} \qquad \textbf{(VII 93)}$$

(vom avea atunci **f(x, y) = ct**.) Liniile de nivel sunt elipse ale căror semiaxe sunt respectiv kE_x si kE_y.

Centrele elipselor coincid cu centrele de dispersie. Aceste elipse se numesc *elipse de dispersie*. Axele lor sunt *axe de dispersie*. Se numeşte *elipsă unitară de dispersie* elipsa ale cărei semiaxe sunt respectiv egale cu abaterile probabile $\mathbf{E_x}$ şi $\mathbf{E_y}$.

Se obţine ecuaţia elipsei unitare punând în ecuaţia **(VII 93)** **k= 1**.

$$\frac{x^2}{Ex^2} + \frac{y^2}{Ey^2} = 1 \qquad \textbf{(VII 94)}$$

Se numeşte elipsa totală de dispersie elipsa ale cărei semiaxe sunt **4Mx** şi **4My**. Ecuaţia acestei elipse este astfel:

$$\frac{x^2}{(4E_x)^2} + \frac{y^2}{(4E_y)^2} = 1 \qquad \textbf{(VII 95)}$$

Vom arăta în paragraful următor că probabilitatea pentru că variabila aleatoare bidimensionale să aparţină elipsei totale de dispersie este egală cu **0**, **97**, altfel spus, că evenimentul este un eveniment practic cert.

25. Probabilitatea pentru ca o variabilă aleatoare bidimensională cu distribuţie anormală să aparţină unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele principale de dispersie.

Fie:

$$f(x,y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)}$$

După cum ştim probabilitatea pentru ca variabila aleatoare să aparţină unui dreptunghi limitat **x = α ; x = β ; y = γ ; y = δ** este dată de expresia:

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta;\quad \gamma < \bar{y} < \delta) = \int_{\beta}^{\alpha}\int_{\gamma}^{\delta} \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)} dx\, dy \qquad \textbf{(VII 96)}$$

Relaţia **(97)** mai poate fi scrisă şi astfel:

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta;\quad \gamma < \bar{y} < \delta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho}{\sqrt{\pi} E_x} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}} dx \cdot \int_{\gamma}^{\delta} \frac{\rho}{\sqrt{\pi} E_y} e^{-\rho^2 \frac{y^2}{E_y^2}} dy \qquad \textbf{(VII 97)}$$

Dar conform definiţiei funcţiei reduse a lui Laplace, relaţia **(VII 97)** devine:

$$\mathbf{P}(\alpha < \bar{x} < \beta;\quad \gamma < \bar{y} < \delta) = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\delta}{E_y}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\gamma}{E_y}\right)\right] \qquad \textbf{(VII 98)}$$

Dacă în această ultimă formulă punem

$$\alpha = -e_1\ ;\ \beta = e_1\ ;\ \gamma = -e_2\ ;\ \delta = e_2$$

adică dacă considerăm un dreptunghi cu centrul în originea axelor de coordonate, formula **(VII 99)** va lua forma:

$$\mathbf{P}(-e_1 < \bar{x} < e_1;\ -e_2 < \bar{y} < e_2) = \hat{\Phi}\left(\frac{e_1}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{e_2}{E_y}\right) \qquad \textbf{(VII 99)}$$

Remarcă: Se poate de asemenea rezolva problema găsirii probabilităţii pentru ca variabilele aleatoare să aparţină unui dreptunghi de drepte paralele cu axele de coordonate în felul următor. Faptul că variabila aleatoare cade în dreptunghi este un eveniment compus, consistând în aceea că două evenimente, independente sunt simultan realizate: faptul de a aparţine bandei independente
$-\mathbf{e_1} < \bar{x} < \mathbf{e_1}$ şi faptul de a aparţine bandei $-\mathbf{e_2} < \bar{y} < \mathbf{e_2}$.
(Pentru simplificarea scrierii considerăm un dreptunghi al cărui centru este în originea axelor de coordonate). Presupunem că densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $\bar{x}$ să fie

$$f_1(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_x} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}}$$

Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $\bar{y}$ să fie

$$f_2(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_y} e^{-\rho^2 \frac{y^2}{E_y^2}}$$

Calculăm probabilitatea pentru ca variabila aleatoare să aparţină benzii $-\mathbf{e_1} < \bar{x} < \mathbf{e_1}$ şi benzii $-\mathbf{e_2} < \bar{y} < \mathbf{e_2}$

Dar:

$$\mathbf{P(}-e_1 < \bar{x} < e_1\mathbf{)} = \hat{\Phi}\left(\frac{e_1}{E_x}\right)$$

$$\mathbf{P(}-e_2 < \bar{y} < e_2\mathbf{)} = \hat{\Phi}\left(\frac{e_2}{E_y}\right)$$

Probabilitatea realizării simultane a acestui eveniment, adică a faptului ca variabila aleatoare să cadă în dreptunghi este:

$$\mathbf{P(}\alpha < \bar{x} < \beta; \quad \gamma < \bar{y} < \delta\mathbf{)} = \mathbf{P(}-e_1 < \bar{x} < e_1\mathbf{)} \cdot \mathbf{P(}-e_2 < \bar{y} < e_2\mathbf{)} = \hat{\Phi}\left(\frac{e_1}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{e_2}{E_y}\right)$$

Adică am obţinut formula **(VII 100).**

26. Probabilitatea pentru ca o variabilă aleatoare bidimensională să ia o valoare ce aparţine elipsei de dispersie

În teoria erorilor trebuie considerată următoarea problemă. Să se calculeze probabilitatea pentru ca o variabilă aleatoare, de exemplu o eroare de observare dintr-un plan, să aparţină elipsei de dispersie:

$$\frac{x^2}{Ex^2}+\frac{y^2}{Ey^2}=k^2 \qquad \textbf{(VII 100)}$$

dacă densitatea este dată de formula **(VII 92)**. După formula **(VII 83)** obţinem:

$$\mathbf{P[(\bar{x},\bar{y}) \subset D]} = \iint_D \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left[\frac{x^2}{E_x{}^2}+\frac{y^2}{E_y{}^2}\right]} dx\, dy\,. \qquad \textbf{(VII 101)}$$

unde domeniul **Dc** este limitat de elipsa **(VII 100)**. Facem schimbarea de variabilă

$$\boldsymbol{x = E_x u \quad ; \quad y = E_y v}$$

În acest caz elipsa **De** se transformă în cerc. Iacobianul transformării este:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{vmatrix} = E_x E_y \qquad \textbf{(VII 102)}$$

$I = E_x E_y$, şi egalitatea **(VII 101)** va lua forma:

$$\mathbf{P[(\bar{x},\bar{y}) \subset D_e]} = \frac{1}{\pi}\iint_{De} \rho^2 e^{-\rho^2(u^2+v^2)} du\, dv\,. \qquad \textbf{(VII 103)}$$

Trecem la coordonate polare în această ultimă integrală:

$$u = r\cos\varphi, \qquad v = r\sin\varphi$$

Membrul secund al egalităţii **(VII 104)** va avea atunci forma:

$$\mathbf{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \mathbf{D_e}] = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{2\pi}\int_{0}^{k} \rho^2 e^{-\rho^2 r^2} r\, dr\, d\rho$$

Efectuând calculele în membrul secund obţinem expresia probabilităţii de apartenenţă a elipsei de dispersie:

$$\mathbf{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \mathbf{D_e}] = 1- e^{-\rho^2 k^2} \qquad \textbf{(VII 104)}$$

Considerăm un anumit caz particular. Probabilitatea de apartenenţă la elipsa de dispersie se va obţine punând **k = 1** în formula **(VII 104)**.

$$\mathbf{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \mathbf{D}]_{\mathbf{k=1}} = 1- e^{-\rho^2} = 0{,}203 \qquad \textbf{(VII 105)}$$

Probabilitatea de a se găsi în elipsa totală de dispersie, se obţine pentru **k = 4** în formula **(VII 104)**.

$$\mathbf{P}[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \mathbf{D}]_{\mathbf{k=4}} = 1- e^{-16^2} = 0{,}974. \qquad \textbf{(VII 106)}$$

Daca $\mathbf{E_x = E_y = E}$**,** atunci elipsa de dispersie a lui **(VII 93) va fi**

$$\mathbf{x^2 + y^2 = k^2 E^2} \qquad \textbf{(VII 106)}$$

Definiţia 1. Se numeşte abatere radială probabilă un număr E_R astfel ca probabilitatea pentru ca o variabila aleatoare cu două dimensiuni aparţinând cercului de raza $\mathbf{R = E_R}$ să fie egală cu $\frac{1}{2.}$

Din definiţie rezultă ca $\mathbf{R = E_R}$ este determinată plecând de la relaţia:

$$1- e^{-\rho^2 \frac{E_x{}^2}{E^2}} = \frac{1}{2}$$

Din tabele găsim valorile funcţiei exponenţiale

$$E_R = 1{,}75\ E$$

27. Probleme ale statisticii matematice. Material statistic.

Rezultatul observaţiilor şi înregistrărilor fenomenelor aleatoare în masă permit să se obţină date statistice sau material statistic. În particular, acest material statistic poate fi constituit din erorile diferitelor măsurători.

Dacă mărimea observată este o variabilă aleatoare, atunci ea este studiată prin metodele teoriei probabilităţii. Pentru a înţelege natura acestei variabile aleatoare trebuie să se cunoască legea de distribuţie. Determinarea legilor de distribuţie a cantităţilor considerate şi estimarea valorilor parametrilor distribuţiei cu ajutorul valorilor observate constituite obiectul *statisticii matematicii.*

O altă problemă a statisticii matematice constă în elaborarea de metode de tratare şi de analiză a materialului statistic în scopul obţinerii unor concluzii date indispensabile organizării procesului optimal la care participă mărimile considerate.

Cităm câteva exemple ale observaţiilor realizate pe diferite fenomene ce permit obţinerea în final a materialului statistic.

Exemplul 1. În cazul efectuării unor măsurători a lungimii unei mărimi se obţin diferite valori ale acestei lungimi. Aceste valori vor fi numite valori observate.

Diferenţa dintre valoarea veritabilă şi cea observată se numeşte *eroare de măsurare*. Deci cele spuse mai sus pot fi studiate şi sub denumirea de *teorema erorilor*.

28. Serie statistica. Histograma.

Materialul statistic obţinut în urma observaţiilor se aşează într-un tablou format din două linii. În prima linie se aşează numărul măsurătorii, iar în cea de-a doua, valoarea mărimii măsurate $\mathbf{x_i}$. Un astfel de tablou se numeşte *serie statistică simplă.*

Dacă numărul de măsurători este mare atunci această analiză este

i	1	2	3	……..	i	……….	n
x_i	x_1	x_2	x_3	……..	x_i	…………	x_n

greoaie. Din această cauză se efectuează o grupare în felul următor: se împarte tot intervalul valorilor obţinute pentru cantitatea ***x*** in intervale mici egale $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ şi se marchează cu $\mathbf{m_k}$ numărul de valori ale lui ***x*** care cad în intervalul (a_{k-1}, a_k). Numărul

$$\frac{m_k}{n} = p^* \qquad \textbf{(VII 108)}$$

este funcţia relativă corespunzătoare intervalului (a_{k-1}, a_k). Este evident că

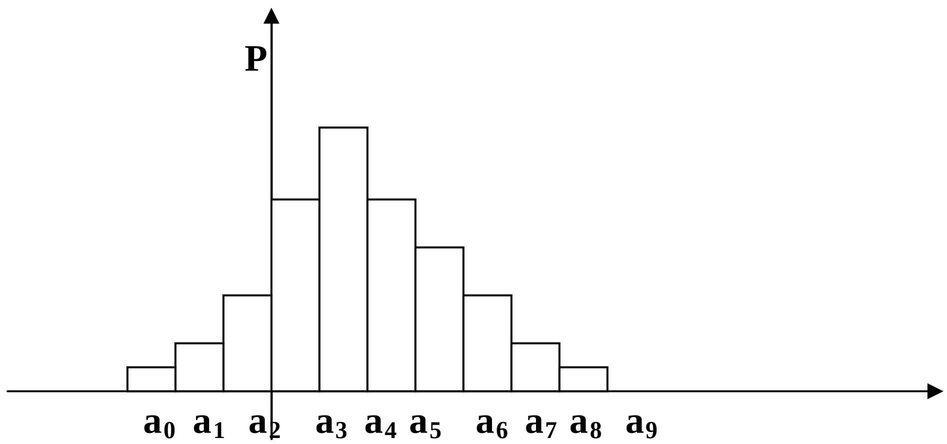
$$\sum_{k=1}^{\lambda} p_k^* = 1 \qquad \textbf{(VII 109)}$$

Cu ajutorul acestor rezultate se formează un tablou din trei linii. În prima linie ne sunt indicate intervalele, în linia a doua numărul m_k care-i corespunde, iar în a treia frecvenţele $\frac{m_k}{n} = p^*$

Interv.	(a_0, a_1)	……	(a_{k-1}, a_k)	…..	$(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$
m_k	m_1	……..	m_k	……	m_λ
p_k^*	p_1^*	……..	p_k^*	…..	p_λ^*

Se spune astfel că am efectuat gruparea. Se poate realiza şi geometric în felul următor: pe axa $\mathbf{O_n}$ se notează punctele $\mathbf{a_0, a_1, a_2, a_3,.. a_k,.. a_\lambda}$. Pe segmentul
$(\mathbf{a_{k-1}, a_k})$ luat ca bază, se construieşte dreptunghiul a cărui arie este $\mathbf{p_k}$.

Figura astfel obţinută se numeşte *histogramă.*



Pe baza grupării şi a histogramei se construieşte cu o anumită aproximaţie funcţia de repartiţie empirică.

Prelucrarea ulterioară a datelor se face în felul următor: se notează cu $\tilde{x}_k$ mijlocul intervalelor (a_{k-1}, a_k), şi se estimează că aceasta este valoarea rezultată în urma unei măsurării care se repetă de $\mathbf{m_k}$ ori. După care se înlocuieşte tabloul corespunzător regrupării, cu următorul tablou:

$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	……….	$\tilde{x}_k$	……..	$\tilde{x}$
m_k	m_1	m_2	……….	m_k	…………	m
p_k^*	p_1^*	p_2^*	……..	p_k^*	…..	p^*

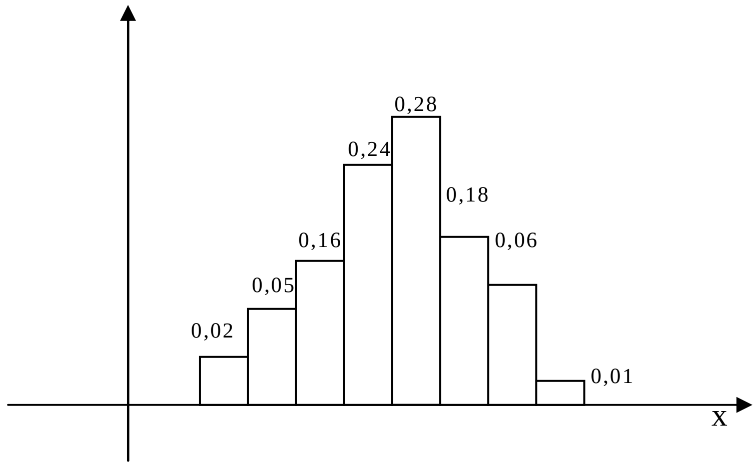
Această prelucrare se realizează presupunând că toate valorile din interiorul intervalului (a_{k-1}, a_k).sunt apropiate unele de altele, astfel le putem estima cu abscisa $\mathbf{x_k}$ din mijlocul intervalului.

Exemplu. Se efectuează 100 de măsurători ale lungimii unui obiectiv, al căror rezultate dau după grupare următorul tablou:

Interv.	80-110	110-140	140-170	170-200	200-230	230-260	260-290
m_k	2	5	16	24	28	18	6
p_k	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06

Utilizând rezultatele grupării, vom construi reprezentarea grafica a serie statisticii, iar apoi tabloul următor:

$\tilde{x}_k$	95	125	155	185	215	245	275
m_k	2	5	16	24	28	18	6
p_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06



29. Determinarea valorii acceptabile a unei mărimi măsurate

Presupunem că rezultatele măsurătorii unei anumite mărimi sunt $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$. Acestea pot fi considerate ca valori particulare ale variabilei aleatoare $\boldsymbol{x}$.
Se adoptă ca *valoare acceptabilă a măsurătorii*, media aritmetică a valorilor obţinute.

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \textbf{(VII 110)}$$

Valoarea m_x^* se numeşte medie statistică. Daca numărul de măsurători $\boldsymbol{n}$ este mare se utilizează materialul tabloului considerat în fig. 28 şi se calculează m_x^* în felul următor:

$$m_x^* = \frac{\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \ldots\ldots + \tilde{x}_k m_k + \ldots\ldots + \tilde{x}_\lambda m_\lambda}{n}$$

sau ţinând seama de (109) obţinem:

$$m_x^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k \, p_k^* \qquad \textbf{(VII 111)}$$

valoarea obţinută se numeşte *medie ponderată.*

Remarcă. În cele ce urmează vom nota rezultatele calculelor cu ajutorul formulelor **(VII 111)** şi **(VII 112)** cu aceeaşi literă. Această remarcă se referă şi la formulele **(VII 113)** şi **(VII 114).** Se poate demonstra că în anumite ipoteze restrictive media statistică tinde spre probabilitate când **n**$\rightarrow$ **∞** spre speranţa matematică a variabilei aleatoare ***x***.

Determinăm acum *varianţa empirică.*

Prin definiţie ea este dată de formula:

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_n^*)^2}{n} \qquad \textbf{(VII 112)}$$

Această mărime caracterizează dispersia valorilor variabilei observate.

Dacă se utilizează materialul tabloului de la fig. 28, varianţa statistică este dată de formula

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_n^*)^2}{n} \qquad \textbf{(VII 113)}$$

Exemplu. Să se determine media statistică şi varianţa statistică al materialului statistic de la exemplul din fig. 28.

Soluţie. Utilizăm formula **(VII 111)** şi obţinem:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \sum_{i=1}^{\lambda} x_i \, p_i^{\bullet} = 95 \cdot 0{,}02 + 125^{2\cdot} \, 0{,}05 + 215 \cdot 0{,}28 + 245 \cdot 0{,}18 +$$

$$275 \cdot 0{,}06 + 305 \cdot 0{,}01 = 201{,}20$$

În virtutea formulei **(VII 113)** avem:

$$D^*\left[\bar{x}\right]=\frac{(x_k-m_k^*)^2}{n}=\sum_{k=1}^{\lambda}(\tilde{x}_k-m_m^*)p_k^* = 95^2\cdot 0{,}02 + 125^2\cdot 0{,}05 + \ldots\ldots+$$

$$+ 275^2\cdot 0{,}06 - (201{,}20)^2 = 1753{,}56$$

30. Determinarea parametrilor legii de distribuţie. Teoria lui Liapunov. Teorema lui Laplace

Fie $\bar{x}$ o variabilă aleatoare de exemplu, rezultatul unei măsuri, a cantităţii de măsurat, δ eroarea comisă în timpul măsurării. Aceste cantităţi sunt legate prin relaţia:

$$\delta = x\text{-}a;\quad \bar{x} = a+\delta \qquad \textbf{(VII 115)}$$

Numeroase experienţe şi observaţii arată că dacă se elimină erorile sistematice, adică erorile constante pentru toate măsurătorile (de exemplu eroarea datorită instrumentelor) şi dacă se elimină erorile grosiere, erorile de măsurare urmează o lege de distribuţie normală al cărui centru de distribuţie este în originea axelor de coordonate. Acest fapt este de asemenea confirmat şi de consideraţii teoretice.

Dacă o variabilă aleatoare este suma unui număr mare de variabile aleatoare, această sumă este, în anumite condiţii restrictive, supusă unei legi de distribuţie normală. Această aserţiune este formulată sub forma de „teorema limitei centrale” stabilită de Liapunov (1857-1918). Vom enunţa această teoremă sub o formă oarecum simplificată.

Teorema 1. Dacă variabilele aleatoare independente $\mathbf{x_1,x_2,..,x_n}$ au aceeaşi lege de distribuţie de speranţă matematică ***a*** (se poate lua fără a restrânge generalitatea ca **a= 0**) şi varianta σ^2 când ***n*** creşte indefinit, legea de distribuţie a sumei

$$\bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i}{\sigma\sqrt{n}}$$

Va diferi atât de puţin cât vrem noi de la legea normală ($\overline{y_n}$ este normată astfel încât **M[**$\overline{y_n}$**]= 0,   D[**$\overline{y_n}$**]= 1.**

Importanţa practică a teoremei lui Liapunov constă în cele ce urmează. Se consideră o variabilă aleatoare, de exemplu aleatoarea unei cantităţi de o valoare dată, această depărtare se datorează acţiunii simultane a numeroşi factori aleatori, care dau fiecare o contribuţie la abatere. Toate aceste componente ne sunt necunoscute, după cum se poate de asemenea să fie necunoscute şi legile de distribuţie a variabilelor aleatoare ce constituie abaterea globală ce urmează o lege de distribuţie normală.

Din teorema lui Liapunov rezultă că dacă $\mathbf{x_1}$**,**$\mathbf{x_2}$**,..,**x_n sunt rezultatele măsurătorilor unei anumite cantităţi (fiecare din $\mathbf{x_i}$ este o variabilă aleatoare**)** atunci variabila aleatoare definită de media aritmetică

$$\mathbf{x}= \frac{x_1+x_2+......+x_n}{n} \qquad \textbf{(VII 116)}$$

va urma, pentru un **n** suficient de mare o lege cât mai aproape de legea normală dacă variabilele aleatoare urmează fiecare aceeaşi lege de distribuţie**.**

Teorema rămâne valabilă de asemenea pentru sumele de variabile aleatoare care urmează legii de distribuţie diferite în anumite condiţii complementare care sunt general îndeplinite pentru variabile aleatoare pe care le considerăm în practică. Experienţa arată că pentru un număr de termeni de ordinul a 10_ se poate deja estimă că suma lor este distribuită normal.

Notăm prin $\overline{a}$ şi $\overline{\sigma^2}$ valorile aproximative ale speranţei matematice şi ale varianţei. Putem scrie legile aproximative de distribuţie a variabilelor aleatoare

$\overline{\delta}$ şi $\overline{x}$:

$$\mathrm{f}(\overline{\delta}) = \frac{1}{\overline{\sigma}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\overline{\delta^2}}{2\overline{\sigma^2}}\right) \qquad \textbf{(VII 117)}$$

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{\overline{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\overline{a})^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) \qquad \textbf{(VII 118)}$$

Parametrul $\overline{a}$ este determinat plecând de la datele experimentale conform formulei:

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \qquad \textbf{(VII 119)}$$

Fara a ne opri asupra demonstratiei indicam ca este mai natural de a estima parametrul $\overline{\sigma}$ dupa formula:

$$\overline{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{a})^2}{n-1}$$

Exemplul 1. Sa se dea expresia legii de distributie a variabilei aleatoare cu ajutorul rezultatelor masuratorilor de la exemplele 28 si 29.

Solutie. Dupa calculele efctuate deja avem:

$$\overline{a} = m_x^* = 201$$

$$\overline{\sigma} = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{100}{99} \cdot 1754 = 1771$$

$$\overline{\sigma} = \sqrt{1771} \approx 41$$

Înlocuind aceste valori in formula (3) obţinem:

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{41} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-201)^2}{2 \cdot 1771}\right)$$

Remarcă. Dacă am obţinut funcţia de distribuţie empirică a unei anumite variabile aleatoare ***x***, se poate rezolva problema apartenenţei ei la legea normală în felul următor. Fie date valorile variabilelor aleatoare:

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

Determinăm media aritmetică ***a*** cu ajutorul formulei **(VII 4).** Calculăm apoi variabila aleatoare centrată: $y_1, y_2, \ldots y_n$

Formăm o serie de valori absolute ale lui y_i în ordine crescătoare. Dacă **n** este impar, se adoptă ca eroare mediană $\mathbf{E_m}$ valoarea absolută $|y_m|$ în seria valorilor absolute, care figurează ca al $(\frac{n-1}{2}+1)$ rang şi dacă **n** este par se adoptă pentru $\mathbf{E_m}$ media aritmetică a valorilor absolute a cantităţilor ce au rangul $\frac{n}{2}$ si $\frac{n}{2}+1$.

Evaluăm mai departe eroarea aritmetică medie după formula

$$d=\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i|}{n} \qquad \textbf{(VII 121)}$$

După formula (5) se determina abaterea patratica medie:

$$\overline{\sigma}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{n-1}} \qquad \textbf{(VII 122)}$$

Se obtin in sfarsit raporturile $\frac{E_m}{d}$ si $\frac{E_m}{\overline{\sigma}}$.

Pentru o variabilă aleatoare ce urmează o lege de distribuţie normală, raporturile $\frac{E}{d}$ şi $\frac{E}{\sigma}$ sunt egale respectiv cu 0,8453 si 0,6745. Dacă între rapoartele calculate şi cele de mai sus există o diferenţă mai mică de 10% se adoptă convenţional că **y** este o lege normală.

O consecinţă a teoremei limitei centrale este importantă- teorema lui Laplace care stabileşte probabilitatea pentru ca un eveniment să fie realizat nu mai puţin de α ori şi nu mai mult de β ori.

O enunţăm fără să o demonstrăm :

Teorema 2.(a lui Laplace). Dacă se efectuează **n** probe independente astfel ca probabilitatea de realizare a unui eveniment **A** este egală cu **p** pentru fiecare dintre ele, avem relaţia :

$$\mathbf{P(\alpha < m < \beta)}=\frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{npq}}\right)-\phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{npq}}\right)\right] \qquad \textbf{(VII 123)}$$

Unde **m** este numărul de realizări a evenimentului **A, q= 1-p, P(α < m < β)**este probabilitatea pentru ca numărul de realizări a evenimentului **A** să fie impus între α şi β.
Funcţia **ϕ(x)** este definită deja.
Exemplul 2. Probabilitatea rebutului în cazul fabricării unor anumite piese este de 0,01. să se determine probabilitatea pentru ca din 1000 de piese luate la întâmplare numărul de piese defectuoase să nu fie superior lui 20.

Soluţie. În cazul considerat avem :

$$n = 1000 ;\quad p = 0{,}01 ;\quad q = 0{,}99 ;\ \alpha = 0 ;\ \beta = 20$$

Vom gasi atunci:

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{2\sqrt{npq}}} = \frac{0-10}{\sqrt{2}\sqrt{9{,}9}} = -2{,}25$$

$$\frac{\beta - np}{\sqrt{2\sqrt{npq}}} = \frac{20-10}{\sqrt{2}\sqrt{9{,}9}} = 2{,}25$$

cu formula (124) obţinem:

$$\mathbf{P(0 \le m \le 20)} = \frac{1}{2}[\phi(2{,}25) - \phi(-2{,}25)] = \phi(2{,}25) = 0{,}9985$$