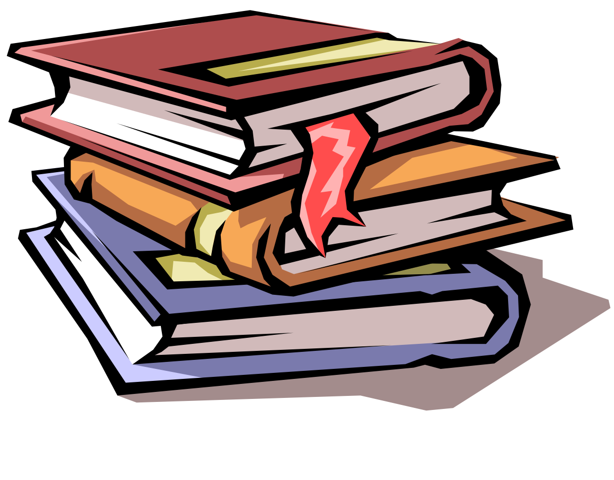
Functia de gradul al doilea



Prefaţă

Această lucrare a fost realizată cu sprijinul corporaţiei „Paul & Co.” şi se adresează unor anumite categorii de persoane, şi anume elevilor de liceu care doresc să-şi aprofundeze cunoştinţele în domeniul matematicii. De asemenea această sinteză, scurtă şi la obiect, a funcţiei de gradul II este foarte utilă elevului modern din ziua de astăzi care nu se omoară cu învăţatul şi doreşte să facă într-aşa fel încât să scape cât mai repede. Lucrarea de faţă nu numai că-l face să reţină esenţialul într-o perioadă relativ scurtă, ba chiar îl poate atrage, şi pe viitor, cu siguranţă va rezerva mai mult timp studiului.

Cuprins

A. Partea teoretică

1. DEFINIŢIA FUNCŢIEI DE GRADUL AL DOILEA. EXEMPLE

Definiţie. Fiind date numerele reale, *a,b,c* cu $a \neq 0$, funcţia f : R→R definită prin formula: $f(x) = ax^2 + bx + c$ se numeşte *funcţie de gradul al doilea cu coeficienţii a, b, c*.

1) Deoarece domeniul şi codomeniul funcţiei de gradul al doilea este **R** vom indica această funcţie astfel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ sau } y = ax^2 + bx + c$$

2) O funcţie de gradul al doilea f : **R→R,** $f(x) = ax^2 + bx + c$ este perfect determinată când se cunosc numerele reale a, b, c ($a \neq 0$).
3) Trebuie să observăm că în definiţia funcţiei de gradul al doilea condiţia $a \neq 0$ este esenţială în sensul că ipoteza $a = 0$ conduce la funcţia de gradul întâi, studiată în clasa a VIII-a.
4) Denumirea de funcţie de gradul al doilea provine din faptul că este definită prin intermediul trinomului de gradul al doilea $aX^2 + bX + c$.

Exemple de funcţii de gradul al doilea

1) $f_1(x) = 7x^2 - 9x + 10$, ($a = 7, b = -9, c = 10$);
2) $f_2(x) = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 1$, ($a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 1$);
3) $f_3(x) = 0.51x^2 - 2x$, ($a = 0.51, b = -2, c = 0$);
4) $f_4(x) = x^2 + 0.31$, ($a = 1, b = 0, c = 0.31$);
5) $f_5(x) = -x^2 - 5x - 0.31$, ($a = -1, b = -5, c = -0.31$).

2. VARIAŢIA Şi REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIEI DE GRADUL AL DOILEA

- **Forma canonică**

Reamintim că pentru orice $x \in R$

$$ax^2 + bx + c = a[(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2]$$

Rezultă că pentru orice $x \in R$, avem

$$f(x) = a[(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2] \quad (1)$$

Membrul drept al egalităţii (1) se numeşte *forma canonică a funcţiei pătratice.* Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$, discriminantul ecuaţiei asociate ($ax^2 + bx + c = 0$), se mai numeşte *discriminantul funcţiei pătratice.*

Observăm că $f(-b/2a) = -\Delta/4a$

Exemple

a) $2x^2 - x + 3 = 2[x^2 - 1/2x + 3/2] = 2[x^2 - 2*x*1/4x + 1/16 - 1/16 + 3/2] = 2[(x - 1/4)^2 + 23/16] = 2(x - 1/4)^2 + 23/8$;
b) $-3x^2 - 4x + 5 = (-3)[x^2 + 4/3x - 5/3] = (-3)[x^2 + 2*2/3x + 4/9 - 4/9 - 5/3] = (-3)[(x + 2/3)^2 - 19/9] = (-3)(x + 2/3)^2 + 19/3$

➢ **Maximul şi minimul**

Exemple

a) $f: R \to R$, $f(x) = 2x^2 - x - 3$. Avem $f(x) = 2(x - 1/4)^2 + 23/8$, $\forall x \in R$, deci $f(1/4) = 23/8$ şi $f(x) \geq f(1/4)$, $\forall x \in R$.

Rezultă că 23/8 este *cea mai mică valoare* sau *minimul* funcţiei f pe R.

b) $f: R \to R$, $f(x) = -3x^2 - 4x + 5$. Avem $f(x) = -3(x + 2/3)^2 + 19/3$, $\forall x \in R$, deci $f(-2/3) = 19/3$ şi $f(x) \leq f(-2/3)$, $\forall x \in R$

Rezultă că 19/3 este *cea mai mare valoare* sau *maximul* funcţiei f pe R.

În general, având în vedere forma canonică a funcţiei pătratice $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi faptul că $f(-b/2a) = -\Delta/4a$, rezultă că pentru orice $x \in R$

$$f(x) - f(-b/2a) = a(x + b/2a)^2$$

Constatăm că semnul diferenţei din membrul stâng depinde de semnul numărului a, deci pentru orice $x \in R$ avem:

- dacă $a > 0$, $f(x) \geq f(-b/2a)$, deci f admite un *minim* pe R;
- dacă $a < 0$, $f(x) \leq f(-b/2a)$, deci f admite un *maxim* pe R;

Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Dacă $a > 0$, *minimul* funcţiei f pe R este $-\Delta/4a = f(-b/2a)$ iar *punctul de minim* este $-b/2a$.
- Dacă $a < 0$, *maximul* funcţiei f pe R este $-\Delta/4a = f(-b/2a)$ iar *punctul de maxim* este $-b/2a$.

➢ **Sensul de variaţie (intervalele de monotonie)**

Exemplu. Vom studia intervalele de monotonie ale funcţiilor g şi h definite pe R, $g(x) = |x - 2| + 3$ şi $h(x) = -|x + 3| + 1$. Avem:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 2 \\ -x + 5, & x < 2 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \geq -3 \\ x + 4, & x < -3 \end{cases}$$

Funcţia *g* are *minimul* în punctul $x = 2$ ($g(x) \geq g(2)$, adică $|x - 2| + 3 \geq 3$ sau $|x - 2| \geq 0$, $\forall x \in R$) şi este strict descrescătoare pe $(-\infty; 2]$, strict crescătoare pe $[2; +\infty)$.

Funcţia *h* are *maximul* în punctul $x = -3$ ($h(-3)$, $\forall x \in R$) şi este strict crescătoare pe $(-\infty; -3]$, strict descrescătoare pe $[-3; +\infty)$.

Fie funcţia $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Dacă $a > 0$, atunci f are *minim* pe R şi vom arăta că se comportă analog cu funcţia *g*. Dacă $a < 0$, atunci f are un *maxim* şi vom arăta că se comportă analog cu funcţia *h*.

Fie $u, v \in R$, $u \neq v$. Raportul de variaţie asociat lui f şi numerelor u, v este

$$(f(u) – f(v))/(u-v) = (au^2 + bu - av^2 - bv)/(u - v) = a(u + v) + b$$

Să studiem semnul raportului de variaţie în cazul $a > 0$.

Dacă $u, v \in (-\infty; -b/2a]$, atunci din $u \leq -b/2a$, $v \leq -b/2a$, rezultă $u + v \leq -b/a$ sau $a*(u + v) + b \leq 0$. Avem $a*(u + v) + b = 0 \leftrightarrow u = v = -b/2a$, situaţie care nu poate avea loc, deoarece prin ipoteză $u \neq v$. Rezultă $a*(u + v) + b < 0$, deci în cazul $a > 0$, f este strict descrescătoare pe $(-\infty; -b/2a]$.

Dacă $u, v \in [-b/2a; +\infty)$, deducem analog $a(u + v) + b > 0$, deci în cazul a > o, f este strict crescătoare pe $[-b/2a; +\infty)$.

În mod analog se studiază cazul $a < 0$.

Fie funcţia $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Dacă $a > 0$, atunci funcţia f atinge *minimul* în punctul $–b/2a$ şi este: strict descrescătoare pe $(-\infty; -b/2a]$, strict crescătoare pe $[-b/2a; +\infty)$;
- Dacă $a < 0$, atunci funcţia f atinge *maximul* în punctul $–b/2a$ şi este: strict crescătoare pe $(-\infty; -b/2a]$, strict descrescătoare pe $[-b/2a; +\infty)$.

- **Reprezentarea grafică a funcţiei pătratice**

Considerăm un reper în plan. Reprezentarea grafică a funcţiei $f : R \rightarrow R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, adică mulţimea punctelor M (x, y) ale căror coordonate verifică relaţia $y = ax^2 + bx + c$, este o curbă numită *parabolă.* Vom nota această curbă prin X_f.

A. *Condiţia ca un punct din plan să aparţină curbei* X_f

Fie M (p, q) un punct din plan. Punctul M (p, q) aparţine curbei X_f dacă şi numai dacă $q = f(p)$, deci $q = ap^2 + bp + c$.

Dacă $q \neq ap^2 + bp + c$, atunci X_f nu trece prin M (p, q).

Punctul $V(-b/2a, -\Delta/4a)$ aparţine curbei X_f pentru că $-\Delta/4a = f(-b/2a)$ şi se numeşte *vârful parabolei.*

Exemple

- $A (2, -3) \in X_f \Rightarrow -3 = 4a + 2b + c$; $B (-1, 0) \in X_f \Rightarrow 0 = a - b + c$.
- $a + b + c = 0 \Rightarrow C (1, 0) \in X_f$; $a - b + c = 2 \Rightarrow D (-1, 2) \in X_f$.

B. *Axa de simetrie a curbei* X_f

Fie o funcţie $f : R \rightarrow R$. Dreapta de ecuaţie $x = h$ este *axă de simetrie pentru curba reprezentativă a funcţiei f* dacă

$$f(h + x) = f(h - x), \forall x \in R.$$

Dacă are loc relaţia $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in R$ (avem $h = 0$), atunci curba este simetrică în raport cu axa Oy şi f este o funcţie *pară.*

Funcţia pătratică $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ verifică relaţia

$$f(-b/2a + x) = f(-b/2a - x),\ \forall\ x \in R.$$

ceea ce se poate demonstra direct sau utilizând forma canonică.

Curba reprezentativă a funcţiei $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ admite ca *axă de simetrie* dreapta de ecuaţie $x = -b/2a$.

În particular, dacă $b = 0$, $f(x) = ax^2 + c$ este o funcţie *pară.*

C. *Intersecţia curbei X_f cu axele de coordonate*

Se ştie că $Ox = \{(x, y) | x \in R, y = 0\}$, iar $Oy = \{(x, y) | x = 0, y \in R\}$.

Rezultă:

$M (x, y) \in X_f \cap Ox \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ şi $y = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ şi $y = 0$.

$M (x, y) \in X_f \cap Oy \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ şi $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ şi $y = c$.

După cum $\Delta = b^2 - 4ac$ este strict pozitiv, nul sau strict negativ, ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ are două soluţii reale x_1 şi x_2, o singură soluţie reală $x = -b/2a$, respectiv nici o soluţie reală.

În consecinţă:

- dacă $\Delta > 0$, $X_f \cap Ox = \{A(x_1, 0), B (x_2, 0)\}$;
- dacă $\Delta = 0$, $X_f \cap Ox = \{A (-b/2a, 0)\}$;
- dacă $\Delta < 0$, $X_f \cap Ox = \emptyset$.

De asemenea, reprezentarea grafică a oricărei funcţii pătratice intersectează axa Oy, şi anume

$$X_f \cap Oy = \{C(0, c)\}$$

Pentru $c = 0$, curba asociată funcţiei $f(x) = ax^2 + bx$ trece prin originea reperului.

- **Trasarea curbei reprezentative a unei funcţii pătratice**

Pentru a reprezenta grafic o funcţie pătratică $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ adică pentru a trasa curba sa reprezentativă X_f, numită parabolă, se procedează după cum urmează.

1) Se determină şi se înscriu într-un *tabel de variaţie* coordonatele unui număr finit de puncte ale curbei X_f, printre care este bine să se afle:
   - ✓ punctele de intersecţie ale curbei cu axele reperului;
   - ✓ punctul $V (-b/2a, -\Delta/4a)$, vârful parabolei.
2) Se reprezintă aceste puncte într-un reper al planului, ales astfel încât să putem figura toate punctele.
3) Se unesc punctele reprezentate printr-o curbă continuă, ţinând cont de:
   - ✓ Intervalele de monotonie ale funcţiei pătratice;
   - ✓ Simetria curbei X_f în raport cu dreapta de ecuaţie $x = -b/2a$.

Cu ajutorul curbei astfel obţinute, putem obţine o bună aproximare a coordonatelor oricărui punct al curbei X_f.

- **Semnul funcţiei pătratice**

I. Cazul $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	semn a	0	semn contrar a	0	semn a	

II. Cazul $\Delta = 0$

x	$-\infty$		-b/2a		$+\infty$
$f(x)$		semn a	0	semn a	

III. Cazul $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		semn a	

B. Partea aplicativă

1) Să se construiască tabelul de variaţie şi reprezentarea grafică a următoarei funcţii $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ($\Delta > 0$, $a > 0$)

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$F(x)$		3	0	-1	0	

2) $x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$

f.c. $= a[(x - b/2a)^2 - \Delta/4a^2]$

$x^2 - 2x - 8 = [(x - 1)^2 - 36/4] = (x + 1)^2 - 9$

$\Delta = 4 + 32 = 36$

3) $f : R \to R$

$f(x) = px^2 - (p^2 - 6)x + p^2 - 1 = \min x,\ x = 5/2$
$p > 0$
$y (\min) = f(5/2) = -\Delta/4a$
$f(5/2) = p(5/2)^2 - (p^2 - 6)*5/2 + p^2 - 1$
$= -3/2p^2 - 25/4p + 14$
$\Delta = p^4 – 12p^2 + 36 – 4(p^3 - p) =$
$= -12p^2 - 4p^3 + p^4 + 4p + 36 =$
$-\Delta/4a = (12p^2 + 4p^3 - p^4 - 4p - 36)/4p$
$-p^4 + 4p^3 + 12p^2 - 4p – 36 = 4p(-3/2p^2 + 25/4p + 14)$
$-p^4 + 4p^3 + 12p^2 - 4p – 36 = -6p^3 + 25p^2 + 56p$
$-p^4 + 4p^3 + 12p^2 + 6p^3 - 25p^2 - 60p - 36 = 0$
$-p^4 + 10p^3 - 13p^2 - 60p - 3 = 0$
$p^4 - 10p^3 + 13p^2 + 60p + 36 = 0$
$P(-2): 16 + 80 + 52 - 120 + 36 = 0$

Se descompune polinomul din stânga ecuaţiei, în factori de gradul II şi se egalează cu factorii cu 0. Ecuaţia se scrie $(p^2 - 5p - 6)^2 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 5p - 6 = 0 \Rightarrow p_1 = 6;\ p_2 = -1$

4) $f : R\rightarrow R$
$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
$f(x) \in [-1/8, +\infty), (\forall)\ x \in R$
$a = 2 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \min$
$\min f = -\Delta/4a = -(b^2 - 4ac)/4a = -(9 - 8)/8 = -1/8$

5) $f : R\rightarrow R$
$f(x) = x^2 - 8x + 12$
$\cap\ Ox: y = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$
$\Delta = 64 – 48$
$= 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$
$x_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a = (8 + 4)/2 = 6 \Rightarrow A\ (6, 0)$
$x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a = (8 - 4)/2 = 2 \Rightarrow B\ (2, 0)$
$\cap\ Oy: x = 0 \Rightarrow y = 12 \quad \Rightarrow \quad C\ (0, 12)$
$a = 1,\ a > 0 \Rightarrow x_{min} = 8/2 = 4$
$y_{min} = -\Delta/4a = -1 \Rightarrow V\ (4, -1)$

x	-1	0	2	4	6	7
$f(x)$	21	12	0	-1	0	5

ÎNSEMNĂRI