# CONCURSUL INTERJUDETEAN „PITAGORA”

## PROBA INDIVIDUALA

### Clasa a IV-a

**1)** a) Aflati suma cifrelor numarului de forma $\overline{aabcedbe}$ stiind ca sunt indeplinite simultan conditiile: i) d > e; ii) $2 \times a = 10$; iii) b + $2 \times c = 10$; iv) d + b + e = 10; v) $d \times e = 7$.

b) Aflati x + y + z stiind ca: i) marind pe x de 3 ori suma creste cu 48; ii) mcsorand pe y de 3 ori suma scade cu 32; iii) inlocuind pe z cu 48 suma creste cu 12.

Dumitru Avram, invatator, Rm. Valcea

**2)** Cand un sfert din numarul baietilor din clasa a IV-a A pleaca din curtea scolii, in clasa raman 24 de elevi. Cand un sfert din numarul fetelor pleaca din clasa, raman in clasa 25 de elevi. Cati elevi sunt in clasa a IV-a A.

Constantin Dinca, invatator, Rm. Valcea

**3)** Proprietarul unei galerii de arta a cumparat 4 tablouri cu 500000 lei fiecare pe care le-a vandut cu 400000 lei bucata. A mai cumparat cateva tablouri cu 200000 lei bucata pe care le-a vandut cu 300000 lei bucata. Dupa ce a vandut toate tablourile cumparate constata ca a castigat 1500000 lei. Cate tablouri cu 200000 lei bucata achizitionase?

Maria Grecu, invatatoare, Rm. Valcea

**4)** Din A pleaca spre B, iar din B sprea A cate un automobil cu aceeasi viteza. La un moment dat, distanta dintre ele este de 4800 m pe care o parcurg in doua minute pana ce se intalnesc. Apoi isi continua drumul spre B, respectiv A si, fara oprire, se intorc si are loc a doua intalnire dupa 42 minute de la prima intalnire.

a) Care este viteza de deplasare? b) Care este distanta dintre A si B? Daca dupa a doua intalnire automobilul care a plecat din B isi mareste viteza cu o treime, la ce distanta de B are loc a treia intalnire?

Maria Diaconu, Elena Maiug, invatatoare, Rm. Valcea

### Clasa a V-a

1) Fie S = $1^3 + 2^3 \cdot 3^3 + 4^3 \cdot 5^3 \cdot 6^3 + ... + 4951^3 \cdot ... \cdot 5049^3 \cdot 5050^3$.

a) Cati termeni are suma? b) Este S un patrat perfect?

Artur Balauca, profesor, Botosani

2) Aflati valoarea raportului dintre cel mai mare si cel mai mic numar natural de forma $\overline{abab}$, fiecare fiind produsul a trei numere prime.

Leon Genoiu, profesor, Rm. Valcea

3) Intr-o cutie sunt creioane colorate cu una dintre culorile albastru, rosu, respectiv verde. Numarul creioanelor albastre reprezinta $\frac{8}{15}$ din numarul celor rosii, iar cele rosii reprezinta $\frac{15}{20}$ din numarul celor verzi. Sa se afle cate creioane sunt de fiecare fel daca numarul total de creioane este de forma $\overline{aba}$

Nicolae Serban, profesor, Rm. Valcea

4) Dublul numarului paginilor unie carti este egal cu numarul cifrelor folosite in paginarea acesteia. Cate pagini are cartea? Daca intr-o zi citesc cu o pagina mai mult decat in ziua precedenta, in cate zile pot citi cartea, daca o citesc in cel mult 10 zile si cate pagini citesc in fiecare zi?

Mariana si Constantin Saraolu, profesori, Rm. Valcea

### Clasa a VI-a

**1)** Determinati numerele intregi pare care sunt de forma $\overline{abcd}$ si indeplinesc simultan conditiile: i) $\overline{abcd}\,\mathrm{M}\,\overline{dcba}$; ii) $13 | \overline{abcd}$; iii) au 32 divizori fiecare.

Ilarie Lazar, profesor, Ploiesti

**2)** Aflati numerele prime care verifica relatiile: a) $m^2 + n^2 = 1706$; b) $x^2 + y^2 = 3842$.

Leon Genoiu, profesor, Rm. Valcea

**3)** Fie triunghiul ABC ($[AB] \equiv [AC]$), unde perpendiculara in C pe BC intersecteaza AB in D si G este mijlocul segmentului AC.

a) Aratati ca $\frac{EC}{DC}=\frac{1}{3}$, unde $BG\cap DC=\{E\}$ ; b) Aflati distanta de la D la dreapta BG, precum si valoarea raportului $\frac{GE}{DC}$, daca $m(\angle B)$ = 60$^o$, iar BC = a.

Constantin Dragomir, profesor, Pitesti

**4)** De aceeasi parte a semidreptei [OA se considera punctele B, C, D cu $[OA]\equiv[OB]\equiv[OC]\equiv[OD]$, $m(\angle AOB)$ = 15$^o$, iar $m(\angle AOD)=\frac{9}{4}\cdot m(\angle AOC)=9\cdot m(\angle AOB)$. Bisectoarea unghiului AOC intersecteaza pe AC in N, iar pe BD in P. Fie Q intersectia dreptelor AC si BD.

a) Aratati ca distanta de la O la dreapta BD este $\frac{AC}{2}$; b) Demonstrati ca triunghiul PNQ este dreptunghic isoscel.

Gheorghe Radu, profesor, Rm. Valcea

**Clasa a VII-a**

1) a) Daca $a^2+b^2-8a\sqrt{3}+10b\sqrt{2}+98=0$, atunci $E_1=\frac{a\sqrt{3}-2b\sqrt{2}}{a^2+b^2}$, $E_2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-8a\sqrt{3}}$ si $E_1\cdot E_2$ sunt patrate perfecte; b) Daca a, b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi si p este semiperimetrul sau, atunci exista inegalitatea: $\sqrt{abc(p-a)(p-b)(p-c)}\le\frac{p^3}{8}$.

Mucenic Ionescu, profesor, Pitesti

2) Determinati numarul intregilor n, cu $1\le n\le 2001$, astfel incat $24\,|\,(n^3+23n)$.

Maria Ignat, profesoara, Craiova

3) a) Fie M $\in Int\Delta ABC$ si P, Q, R intersectiile semidreptelor [AM, [BM, respectiv [CM cu (BC), (AC), respectiv (AB). Aratati ca suma $\frac{MP}{AP}+\frac{MQ}{BQ}+\frac{MR}{CR}$ este constanta; b) Fie ABCD un patrulater convex de arie S. Consideram M $\in$ (AB), N $\in$ (BC), P $\in$ (CD), Q $\in$ (DA). Aratati ca minim una dintre ariile triunghiurilor AQM, BMN, CNP, DPQ este mai mica sau egala decat $\frac{S}{8}$ .

Mariana si Constantin Saraolu, profesori, Rm. Valcea

4) In triunghiul echilateral ABC se considera M un punct interior si fie P, Q, R proiectiile lui M pe (AB), (BC), respectiv (AC). Aratati ca: a) Suma distantelor de la M la laturi este constanta;

b) Suma AP + BQ + CR este constanta; c) Raportul $\frac{AT}{TM}$ este constant, unde M apartine inaltimii din A si AM $\cap$ PR = {T}.

Ion Jan Zamfir, profesor, Rm. Valcea

**Clasa a VIII-a**

1) a) Sa se rezolve sistemul: $\begin{cases} x-ay+a^2z-a^3=0 \\ x-by+b^2z-b^3=0 \\ x-cy+c^2z-c^3=0 \end{cases}$, unde a, b,c $\in$ R, $a\ne b\ne c\ne a$ ;

b) Sa se reprezinte grafic functia f: A $\to$ R, f(x) = [x] – 1, unde A = $\{x\in R \,|\, |x-1|\le 2\}$.

Nicolae Seimeanu, profesor, Timisoara

2) Sa se arate ca:
a) exista numere naturale distincte si nenule x, y, z, t, u si v astfel incat $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 = v^2$
b) Exista o infinitate de numere naturale distincte care verifica egalitatea de la punctul a).

Artur Balauca, porfesor, Botosani

3) Sa se determine cel mai mic numar natural care admite o scriere de forma:
$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{5}+\frac{e^2}{6}+\frac{f^2}{7}$, unde a, b, c, d, e, f sunt numere naturale distincte.

Liviu Ignat, profesor, Rm. Valcea

4) Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D". Din A se duc perpendicularele pe A'B, A'C si A'D care intersecteaza pe A'B' in M, A'C' in V si A'D' in P.

Sa se arate ca: a) punctele M, N, P sunt coliniare; b) PE, MF, AN si A'C sunt concurente, unde E si F sunt respectiv picioarele perpendicularelor din A pe A'B si A'D; c) $AN \perp MP$.

Nicolae Serban, profesor, Rm. Valcea

**PROBA COLECTIVA**

**Clasa a V-a**

1) Sa se arate ca fractia $\frac{2n^4+1}{3n^4+4}$ este ireductibila pentru orice n numar natural impar.
2) Un numar de zece cifre are 9 cifre egale cu 7. Demonstrati ca el nu poate fi patrat perfect.

Cristinel Mortici, profesor, Targoviste

3) Patru mere cantaresc cat 5 pere, 3 pere cantaresc cat 7 piersici, iar 5 piersici cantaresc cat 8 nuci. Daca pe un taler al unei balante asezam 3 mere, cate nuci trebuie sa asezam pe celalalt taler pentru ca balanta sa fie in echilibru?

Maria Radu, invatatoare, Rm. Valcea, Constantin Magureanu, profesor, Slatina

**Clasa a VI-a**

**1)** Aflati n intreg astfel incat $\sqrt{\frac{3n+5}{n+5}} \in$ Z.

Gheorghe Iacob, profesor, Rm. Valcea

2) Sa se arate ca intr-un triunghi ABC latura AC, bisectoarea unghiului B si mediatoarea laturii BC sunt concurente intr-un punct P daca si numai daca $m(\angle B) = 2 \cdot m(\angle C)$.
3) Fie a, b, c $\in$ Z astfel incat a(a − 1) = b + c, b(b − 1) = a + c; c(c − 1) = a + b.

Aratati ca $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \in$ N.

**Clasa a VII-a**

1) a) Aratati ca $1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000} < 2^{10010}$; b) Daca dintre 3 numere rationale suma oricaror doua este mai mare decat al treilea, atunci dovediti ca numerele sunt strict pozitive.
2) In triunghiul ABC ( $m(\angle A) =$ 90°, fei M mijlocul laturii BC. Mediatoarea laturii BC intersecteaza AC in N, astfel incat $\frac{AN}{NC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Daca AB = a, sa se afle $m(\angle ABC)$.

Emil Mitrache, profesor, Rm. Valcea

3) Fie ABCD un patrulater convex si E, F, G, H simetricele punctelor A, B, C, respectiv D fata de D, A, B, respectiv C. Stiind ca aria patrulaterului EFGH este 100 m², aflati aria patrulaterului ABCD.

Constantin Popescu, profesor, Rm. Valcea

**Clasa a VIII-a**

**1)** Fie f: R $\to$ R cu proprietatea ca oricare ar fi x $\in$ R, avem 2f(x) + 3f(1 − x) = 4f(0) − x si g: R $\to$ R , g(x) = x. Aratati ca $G_f \cap G_g = \Phi$

2) In ortocentrul H al triunghiului ascutitunghic ABC se ridica perpendiculara d pe planul sau.

Aratati ca: a) exista O $\in$ d, astfel incat $AO \perp OB$; b) daca O $\in$ d si $AO \perp OB$, atunci $AO \perp OC \perp OB$; c) $\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) > HA^2 + HB^2 + HC^2$.

4) Aratati ca numerele $\frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ si $\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ nu sunt intregi.