Locuri geometrice

Def.: Locul geometric este mulţimea de puncte care au aceeaşi proprietate.

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment dusă prin mijlocul segmentului. Existenţa şi unicitatea mediatoarea rezultă din faptul că mijlocul unui segment există şi este unic, perpendiculara printr-un punct al dreptei pe dreaptă există şi este unică.

Teorema 1: Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.

Dem.: Se consideră (AB), $O \in (AB)$, $(OA) \equiv (OB)$ şi M un punct de pe mediatoarea segmentului (AB) (Fig.1.1). Dacă $M = O$, afirmaţia este evidentă. Dacă $M \neq O$, $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (C.C.) şi rezultă $(AM) \equiv (BM)$, deci $AM = BM$.

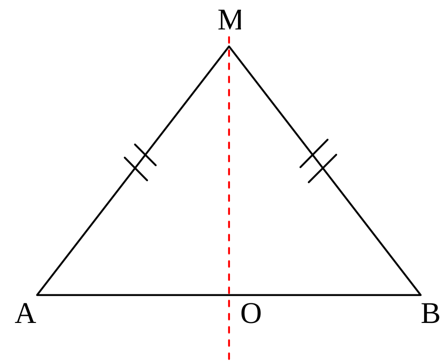


Fig. 1.1

Teorema 2: Orice punct egal depărtat de capetele unui segment aparţine mediatoarei segmentului.

Dem.: Se consideră (AB) şi M un punct astfel încât $(MA) \equiv (MB)$ (Fig.1.2). Dacă $M \in (AB)$, atunci M este mijlocul segmentului (AB) şi aparţine mediatoarei. Dacă $M \notin AB$, fie O mijlocul segmentului (AB). $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (LLL). Deci $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$. Deoarece cele două unghiuri sunt şi suplementare, rezultă că $MO \perp AB$, ceea ce înseamnă că MO este mediatoarea segmentului (AB).

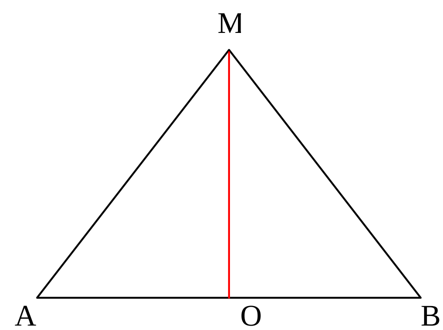


Fig. 1.2

Aşadar mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egal depărtate de capetele segmentului.

Un alt exemplu de loc geometric este bisectoarea unui unghi.

Bisectoarea unui unghi este dreapta care trece prin intersecţia a două drepte diferite, împărţind unghiul format de cele două drepte în două unghiuri congruente.

Teorema 3: Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului, reunit cu vârful unghiului.

Dem.: a) Se va arăta că orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturile unghiului (Fig.1.3). Fie $\widehat{hOk}$, O vârful unghiului, s bisectoarea lui şi $M \in s - \{O\}$. Se notează cu A şi B picioarele perpendicularelor din M pe h şi respectiv k. $\Delta OAM \equiv \Delta OBM$ (IU)
$\Rightarrow (MA) \equiv (MB) \Rightarrow d(M,h) = d(M,k)$.

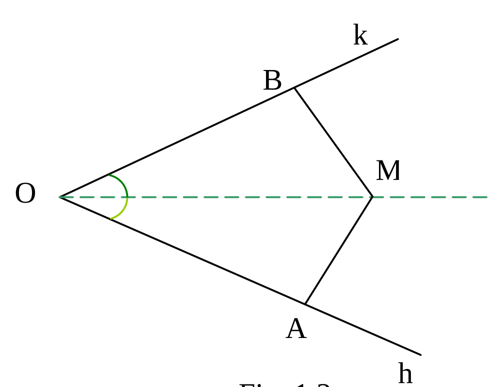


Fig. 1.3

b) Se va arăta că orice punct M egal depărtat de laturile unghiului şi se află în interiorul unghiului, aparţine bisectoarei. Se notează cu A şi B picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile unghiului. $(MA) \equiv (MB)$, (OM) latură comună şi $M\hat{B}O \equiv M\hat{B}A = 90°$ $\Rightarrow \Delta OBM \equiv \Delta OAM$ (IC) $\Rightarrow A\hat{O}M \equiv B\hat{O}M \Rightarrow$ OM bisectoare.

Pe baza proprietăţilor de loc geometric ale bisectoarelor şi mediatoarelor se pot demonstra următoarele două teoreme referitoare la concurenţa bisectoarelor şi mediatoarelor unui triunghi.

Teorema 4: Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente.

Dem.: Din teorema transversalei rezultă că bisectoarele unghiurilor A şi B intersectează pe (BC) şi (AC) în câte un punct D, respectiv E (Fig.1.4). Din aceeaşi teoremă rezultă că există punctul I, $\{I\} = (AD) \cap (BE = (BE) \cap (AD)$. Aşadar $\{I\} \in A\hat{C}B$. Din proprietatea punctelor bisectoarei unui unghi rezultă d(I,BC) = d(I,AB), d(I,AB) = d(I,AC) şi deci d(I,BC) = d(I,AC) şi pentru că $\{I\} \in A\hat{C}B$ rezultă că [CI este bisectoarea unghiului C.

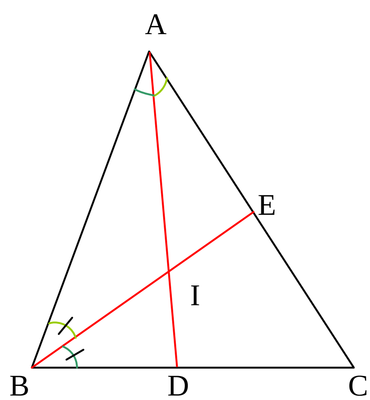
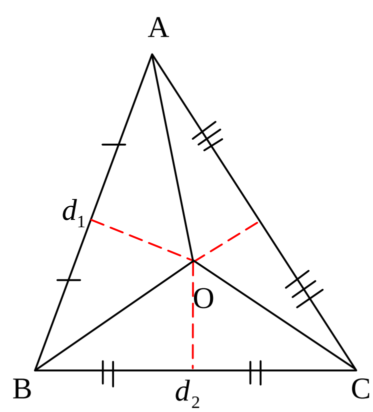


Fig. 1.4



Teorema 5: Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.

Dem.: Fie un triunghi ABC, d_1, d_2 mediatoarele segmentelor (AB) respectiv (BC), $\{O\} = d_1 \cap d_2$ (Fig.1.5). Din proprietatea punctelor mediatoarei $\Rightarrow (OA) \equiv (OB), (OB) \equiv (OC)$, deci $\Rightarrow (OA) \equiv (OC) \Rightarrow$ O aparţine mediatoarei segmentului (AC).

Fig. 1.5

Rezolvarea unor probleme de loc geometric

Pe lângă bisectoarea, mediatoarea, cercul sau arcul, luate ca locuri geometrice, se mai pot adăuga şi:

- mulţimea punctelor situate la aceeaşi distanţă de o dreaptă dată d este reuniunea a două drepte paralele cu d, situate în semiplane diferite (Fig.2.1.);
- fiind dată o semidreaptă (AB, mulţimea punctelor M pentru care unghiul $\widehat{MAB}$ are o măsură dată este reuniunea a două semidrepte deschise, cu originea comună în A, situate în semiplane diferite faţă de AB (Fig.2.2.).

Rezolvarea acestor probleme se realizează în două etape: prima este aceea în care se încearcă determinarea intuitivă a mulţimii respective, iar în etapa următoare se demonstrează efectiv că această mulţime este locul geometric căutat.

Problemele au următorul tip: poziţia unui punct M se determină după o regulă dată în funcţie de poziţia altor puncte şi se cere să se afle locul geometric al punctelor M atunci când unul sau mai multe din celelalte puncte sunt variabile şi parcurg mulţimi date

În prima etapă se încearcă găsirea unor puncte speciale ale locului geometric.

Determinarea a trei puncte ale locului geometric poate sugera dacă este vorba despre un segment de dreaptă sau un arc de cerc, după care se încearcă a se demonstra presupunerea făcută. Astfel, dacă se presupune că punctul M descrie o dreaptă, se va demonstra, de exemplu, că M este la o distanţă constantă de o dreaptă dată sau că AM formează unghi constant cu o semidreaptă fixă. Dacă se presupune că este vorba despre un arc de cerc se va arăta, de exemplu, că punctele sunt la distanţă constantă de un punct fix sau determină un unghi de măsură constantă cu două puncte fixe şi este situat într-unul din cele două semiplane determinate de punctele fixe.

După ce s-a arătat în acest fel că punctele locului geometric aparţin unei mulţimi M (o dreaptă, un cerc, un arc de cerc, etc) se continuă astfel:

1. se arată că, reciproc, orice punct al mulţimii M aparţine locului geometric (în care caz locul geometric este M), sau că acest lucru nu este adevărat.
2. se determină submulţimea M_1 a lui M care aparţine locului geometric; atunci locul geometric căutat este M_1.

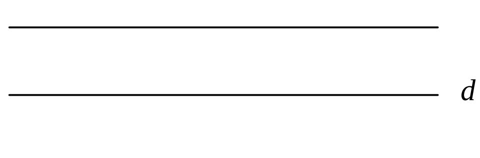


Fig. 2.1

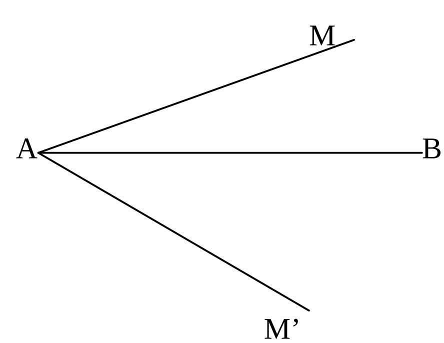


Fig. 2.2

Exemple:

1. Se dă triunghiul ABC, dreptunghic în A. Proiectăm în P, Q punctele B şi C pe o dreaptă variabilă d, care trece prin A. Să se afle locul geometric descris de mijlocul M al segmentului [PQ], când dreapta d se roteşte în jurul lui A.

Rezolvare:

Fie A’, B’, C’ mijloacele lui $[BC],[CA],[AB]$. Dacă *d* ia poziţia AB, atunci P = B şi Q = A, deci C’ aparţine locului geometric, la fel B’. Se observă uşor că dacă *d* ajunge în poziţia AA’, punctul M este în A’. Deci A’, B’, C’ aparţin locului geometric, ceea ce ne conduce la presupunerea că locul căutat este cercul P circumscris dreptunghiului AC’A’B’. Urmând în gând mişcarea lui M când *d* se roteşte în jurul lui A, intuiţia întăreşte presupunerea noastră, ea devenind plauzibilă dar nu sigură. Este necesară o demonstraţie care se face în două etape.

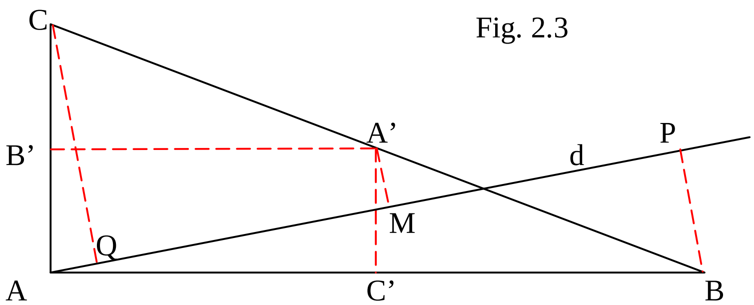


Fig. 2.3

a) Demonstrăm mai întâi că $M \in P$. Va trebui să arătăm că $m\left(\hat{AMA'}\right) = 90°$. Paralela prin A’ la BP şi (CQ) intersectează pe *d* în mijlocul lui [PQ] (teorema paralelelor echidistante), deci în M. Cum $BP \perp d$, avem şi $A'M' \perp d$ deci $m\left(\hat{AMA'}\right) = 90°$. Rezultă că M este situat pe arcul capabil de $90°$ faţă de [AA’], aşadar $M \in P$ (Fig.2.3).

b) Arătam că orice punct $N \in P$ aparţine locului geometric. Dacă $N \neq A$, unim A cu N şi proiectăm B, C pe AN în P’, Q’ (Fig.2.4.). Unghiul $\hat{ANA'}$ fiind înscris într-un semicerc este drept; rezultă că BP’, A’N, CQ’ sunt paralele echidistante şi N este mijlocul lui [P’Q’]. Aşadar, N aparţine locului geometric. Dacă N = A, se duce perpendiculara prin A pe AA’ şi se proiectează pe ea B şi C în P”, Q”. Din nou se observă că A este mijlocul segmentului [P”Q”], deci şi în acest caz N aparţine locului geometric.

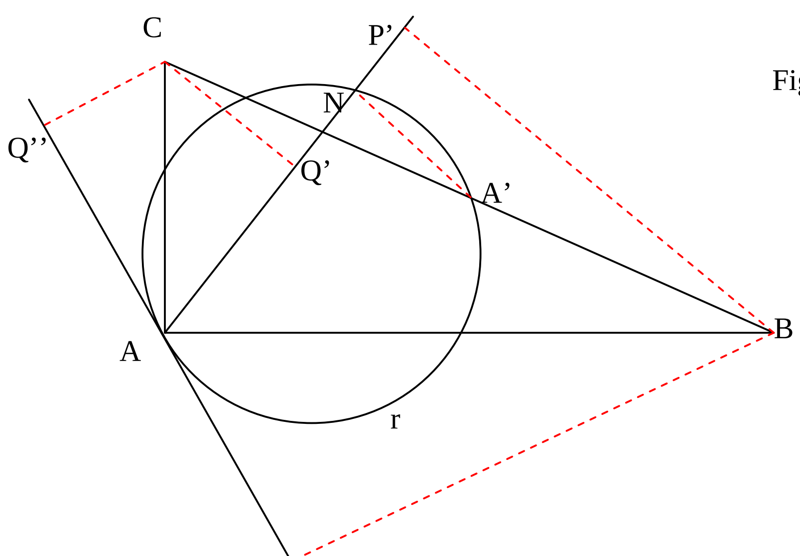


Fig. 2.4

Teorema 6: Locul geometric al punctelor care au aceeaşi putere faţă de două cercuri neconcentrice este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor, numită axa radicală a celor două cercuri.

Demonstraţie: Fie cele două cercuri $C(O_1,r_1)$şi $C(O_2,r_2)$, $O_1 \neq O_2$. Trebuie să aflăm locul geometric al punctelor M pentru care $O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2$. Dacă $r_1 > r_2$, atunci se poate nota $a^2 = r_1^2 - r_2^2$şi condiţia se scrie $O_1M^2 - O_2M^2 = a^2$. Deci trebuie găsit locul geometric al punctelor pentru care diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă. Se foloseşte teorema lui Pitagora generalizată şi se ajunge la faptul că diferenţa este constantă.

Teorema 7: Fiind date trei cercuri cu centrele necoliniare, axele lor radicale, luate două câte două, sunt concurente într-un punct ce se numeşte centrul radical al celor trei cercuri.

Demonstraţie: Fie $C(O_1,r_1)$, $C(O_2,r_2)$, $C(O_3,r_3)$ cele trei cercuri, iar d, d' axele radicale ale primelor, respectiv ultimelor două cercuri. Şrim că $d \perp O_1O_2$ şi $d' \perp O_2O_3$. Dacă am avea $d \parallel d'$, ar rezulta că $O_2O_1 = O_2O_3$, ceea ce nu e posibil, O_1, O_2, O_3 fiind coliniare. Rezultă că *d* şi d' se taie într-un punct *P*. deoarece *P* se găseşte pe *d* are aceeaşi putere faţă de $C(O_1,r_1)$ şi $C(O_2,r_2)$: cum *P* se găseşte şi pe d' va avea aceeaşi putere faţă de cele trei cercuri. În particular *P* va avea aceeaşi putere faţă de $C(O_1,r_1)$ şi $C(O_3,r_3)$, adică va aparţine celei de-a treia axe radicale.

Construcţia axei radicale. Dacă două cercuri au un punct comun, axa lor radicală trece prin acest punct (căci are puterea zero faţă de ambele cercuri). Aşadar:

În cazul cercurilor secante, axa radicală este secanta comună (Fig.3.1). Dacă cele două cercuri sunt tangente, axa radicală este tangenta comună (fiind perpendiculară pe linia centrelor) (Fig.3.2).

În cazul a două cercuri fără puncte comune axa radicală se construieşte în felul următor: se trasează un cerc ajutător care să fie secant cu cele două cercuri (Fig.3.3). ducem axele radicale ale perechilor de cercuri şi le intersectăm în *P*. perpendiculara din *P* pe dreapta ce uneşte cele două centre ale cercurilor iniţiale este axa radical.

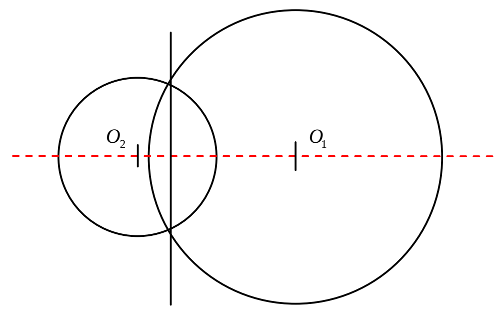


Fig. 3.1.

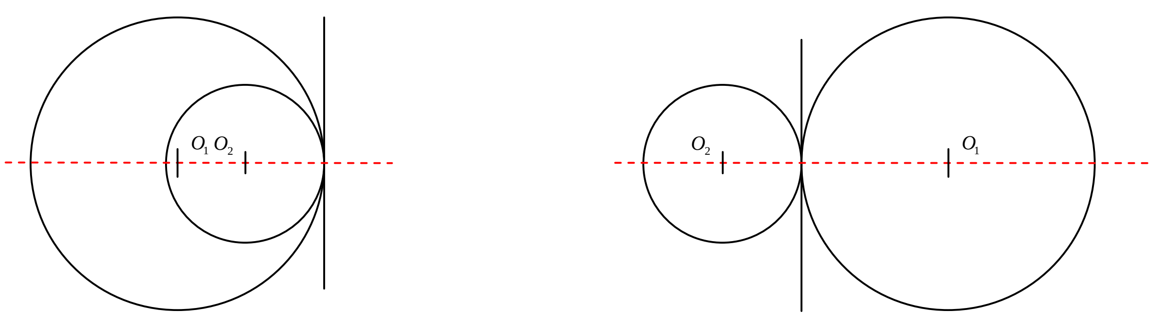


Fig. 3.2.

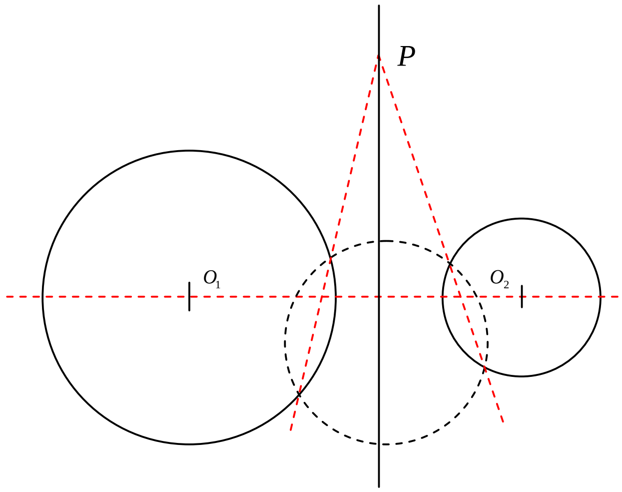


Fig. 3.3.

Teorema 8: Locul geometric al punctelor ale căror distanţe la două puncte fixe sunt într-un raport constant $k \neq 1$ este un cerc (Cercul lui Apollonius).

Demonstraţie: Fie *A,B* puncte fixe şi *k>1*; atunci orice punct *M* al locului geometric este situat în semiplanul *(dB*, unde *d* este mediatoarea lui [*AB*]. Dacă M_1, M_2 sunt intersecţiile lui *AB* cu bisectoarea interioară şi cea exterioară a lui $A\hat{M}B$, atunci, în conformitatea cu teorema bisectoarei unui unghi, $\frac{AM_1}{BM_1} = \frac{AM_2}{BM_2} = \frac{AM}{BM} = k$, deci, punctele fixe M_1, M_2 aparţin locului geometric. Pe de altă parte $MM_1 \perp MM_2$, deci *M* se află pe un cerc *P* de diametru $[M_1M_2]$.

Recirpoc, orice punct $N \in P$ aparţine locului geometric. Într-adevăr, notând $\frac{AN}{BN} = k_1$ avem $N \in (dB$ deci $k_1 > 1$. Din ceea ce-am arătat mai sus rezultă că *N* se află pe un cerc P_1 de diamteru $[N_1N_2]$, unde $N_1, N_2 \in AB, \frac{AN_1}{BN_1} = \frac{AN_2}{BN_2} = k_1$. Dacă $k_1 > k$ punctele N_1, N_2 sunt mai aproape de *B* decât M_1 respectiv M_2, deci $P_1 \subset IntP$, în contradicţie cu $N \in P \cap P_1$. Dacă $k > k_1$, atunci $P \subset IntP_1$ şi iarăşi am ajuns la contradicţie. Aşadar singurul caz probabil este $k = k_1$ şi deci *N* aparţine locului geometric.

Dacă *k<1*, se schimbă rolul lui *A* şi *B* şi se obţine nu cerc în semiplanul *(dA*.

În cazul *k = 1*, locul geometric este mediatoarea *d*.