

Împărțirea prin X-a. Schema lui Horner

T1: Restul împărțirii unui polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ prin polinomul $X-a$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a .

Demonstrație:

-aplicăm teorema împărțirii cu rest

$$\rightarrow f = (X - a)q + r, \text{ unde } \text{grad } r < \text{grad } (X - a) = 1 \quad (1)$$

$$\rightarrow \text{grad } r \leq 0 \text{ (nr. Complex)}$$

în 1 facem $X=a \rightarrow f(a) = (a - a)q(a) + r(a)$

$$\rightarrow f(a) = r(a)$$

dar $r(a) = \text{polinom constant } r(a) = r \rightarrow r = f(a)$

Această teoremă ne ajută să găsim restul împărțirii unui polinom oarecare prin polinomul $X-a$ fără a mai face împărțirea.

Ex: Să se găsească restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$ prin binomul $X-2$.

$$R = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 3.$$

Teorema are dezavantajul că nu ne spune nimic asupra câtului împărțirii polinomului f prin $X-a$.

Procedeu de aflare a câtului :

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$$

$$f = (X - a)q + r \quad (2)$$

$$\text{grad } f = n \rightarrow \text{grad } q = n - 1$$

$$\rightarrow q = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_0$$

$$(2) a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = (X-a)(b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_0) + r$$

$$(X-a)(b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_0) = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_0 X - ab_{n-1} X^{n-1} - ab_{n-2} X^{n-2} - \dots - ab_0$$

$$= b_{n-1} X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) X^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}) X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1) X - ab_0$$

$$(2) a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = b_{n-1} X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) X^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}) X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1) X - ab_0$$

$$a_n = b_{n-1}$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$$

$$\rightarrow a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2} \quad (3)$$

.....

$$a_1 = b_0 - ab_1$$

$$a_0 = r - ab_0$$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$$

$$\rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2} \quad (4)$$

.....

$$b_0 = a_1 + ab_1$$

$$r = a_0 + ab_0$$

X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	X^1	X^0
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
a_n a_0+ab_0	$a_{n-1}+ab_{n-1}$	$a_{n-2}+ab_{n-2}$	a_1+ab_1	
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_0	r

Observație:schema lui Horner ne oferă doar un procedeu de obținere al câtului nu și unul de determinare a restului!