Rangul unei matrice

Se considera o matrice A cu m linii si n coloane cu elemente numere complexe.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathrm{C})$$

Iar k un numar natural, astfel încât 1<k<min (m, n), (prin min (m, n) întelegem cel mai mic dintre numerele m si n)

Daca în A se aleg k linii i_1 i_2 … , i_k si k coloane j_1 j_2 … , j_k ,elementele care se gasesc la intersectia acelor linii si coloane formeaza o matrice patratica de ordin k:

$$\begin{pmatrix} a_{i1,j1} & a_{i1,j2} & \dots & a_{i1,jk} \\ a_{i2,j1} & a_{i2,j2} & \dots & a_{i2,jk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ik,j1} & a_{ik,j2} & \dots & a_{ik,jk} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathrm{C})$$

al carei determinant se numeste minor de ordin k al matricei A

Se observa ca din matricea A se pot obtine C_m^k C_n^k minori de ordin k ai matricei.

Se considea $A=O_{m,n}$ o matrice cu m linii si n coloane. Cum matricea A elemente nenule, exista minori nenuli de un anumit ordin k>1. Dar multimea minorilor matricei A fiind finita este evident ca exista un numar natural r, 1<r<min (m, n), astfel încât sa avem cel putin un minor de ordin r nenul, iar toti minorii de ordin mai mare decât r (daca exista) sa fie nuli.

Definitie: Fie $A \in M_{m,n}(C)$ o matrice nenula. Spunem ca matricea A are rangul r, si scriem rangA =r, daca A are un minor nenul de ordin r, iar toti minorii lui A de ordin mai mare decât r (daca exista) sunt nuli.

Daca A este matricea nula ,atunci matricea are rangul 0, adica rang $(O_{m,n})=0$

Teorema 1 :Fie $A= O_{m,n}$ o matrice. Numarul natural r este rangul matricei A daca si numai daca exista un minor de ordinul r a lui A, nenul ,iar toti minorii de ordinul r+1 (daca exista) sunt nuli.

Demonstratie

"⇒" Daca r este rangul matricei A ,atunci toti minorii de ordin mai mare decât r sunt nuli; deci si cei de ordin r+1 sunt nuli.

"<=" Daca tori minorii de un anumit ordin k ai matricei A sunt nuli, atunci sunt nuli si minorii de ordin k+1 ai matricei. Dezvoltând un minor de ordin k+1 dupa elementele unei linii (sau a unei coloane), obtinem o suma de prodduse, în fiecare produs fiind ca factor un minor de ordinul k al matricei. Acestia fiind nuli rezulta ca suma este nula, adica minorul de ordin k+1 este nul.

Teorema 2: Fie $A\in M_{m,n}(C)$si $B\in M_{n,s}(C)$ doua matrice. Atunci orice minor de ordin k, 1<k<min (m,s) ,al produsului de matrice AB se poate scrie ca o combinatie liniara de minori de ordin k ai matricei A (sau ca o combinatie liniara de minori de ordin k ai matricei B)

Demonstratie

Fie $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le i\le n}}$ si $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le s}}$ cele doua matrice. Atunci produsul lor se scrie :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{ks} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{ks} \end{pmatrix}$$

Se considera un minor δ de ordin k al matricei AB ,situat la intersectia liniilor $i_1, i_2, \ldots, i_k$ si coloanelor $j_1, j_2, \ldots, j_k$

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{i_1 k}b_{k\,j_1} & \sum_{k=1}^{n} a_{i_1 k}b_{k\,j_2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_1 k}b_{k\,j_k} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{i_2 k}b_{k\,j_1} & \sum_{k=1}^{n} a_{i_2 k}b_{k\,j_2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_2 k}b_{k\,j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k}b_{k\,j1} & \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k}b_{k\,j_2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k}b_{k\,j_k} \end{vmatrix}$$

Deoarece fiecare element a lui δ este suma a n termeni, δ se poate descompune într - o suma de n^k minori.

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{i_1 k_1}b_{k\,_1 j_1} & \sum_{k=1}^{n} a_{i_1 k}b_{k\,j_2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_1 k}b_{k\,j_k} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{i_2 k}b_{k\,j_1} & \sum_{k=1}^{n} a_{i_2 k}b_{k\,j_2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_2 k}b_{k\,j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k}b_{k\,j1} & \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k}b_{k\,j_2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k}b_{k\,j_k} \end{vmatrix} = d$$

$$d = b_{k_1 j_1} b_{k_2 j_2} \ldots b_{k_k j_k} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_k} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k k_1} & a_{i_k k_2} & \ldots & a_{i_k k_k} \end{vmatrix}$$

Deci δ este o combinatie liniara de minori de ordin k ai matricei A

Consecinta:Rangul produsului a doua matrice este mai mic sau egal cu rangul fiecarei matrice.

Demonstratie: Fie A si B doua matrice astfel încât sa putem efectua produsul AB si se presupune ca toti minorii de ordin K ai lui A (sau ai lui B) sunt nuli. Conform teoremei precedente rezulta ca minorii de ordin k ai matricei AB, care sunt combininatii liniare de ordin k ai matricei A (sau a matricei B) sunt , de asemenea, nuli. Dupa definitia rangului unei matrice:

$\Rightarrow$rang (AB)<rang A

rang(AB)<rang(B)

Obesrvatie: Nu exista o relatie bine determinata între rangurile factorilor si rangul produsului de matrice