

Progresii aritmetice

1.DEFINITIA PROGRESIEI ARITMETICE

Un sir de numere (A_1, A_2, \dots, A_n ; $n \geq 1$) in care fiecare termen incepand cu al doilea ,se obtine din cel precedent prin adaugarea unui numar constant “ r ” ,numit ratie ,se numeste **progresie aritmetica** .

$$A_{n+1} = A_n + r$$

2.NOTATIE : A_n -:

3.PROPRIETATI

P1: Intr-o progresie aritmetica termenul general A_n este egal cu primul termen plus de atatea ori ratia cati termeni sunt inaintea sa.

$$A_n = A_1 + (n-1) * r$$

P2: Intr-o progresie aritmetica suma termenilor egali departati de extreme este egala cu suma extremelor .

$$A_1 + A_n = A_2 + A_{n-1} = \dots = A_i + A_{n-i+1}$$

P3: Daca avem trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cel din mijloc este media aritmetica a celorlalti doi .

$$A_k = (A_{k-1} + A_{k+1}) / 2$$

P4: Suma termenilor a unei progresii aritmetice cand se da primul termen si ultimul termen :

$$S_n = (A_1 + A_n) * n / 2$$

P5: Suma termenilor a unei progresii aritmetice cand se da primul termen si ratia :

$$S_n = [2*A_1 + (n-1)*r]*n/2$$

4.APLICATII

1(pag71).Sa se scrie primii cinci termeni ai sirului ,cu termenul al n-lea dat de formula :

a) $A_n = 2$ (la puterea „-n “)

$$A_0 = 2$$
(la puterea „0“) = 1

$$A_1 = 2$$
(la puterea „-1“) = 1/2

$$A_2 = 2$$
(la puterea „-2“) = 1/4

$$A_3 = 2$$
(la puterea „-3“) = 1/8

$$A_4 = 2$$
(la puterea „-4“) = 1/16

$$A_5 = 2$$
(la puterea „-5“) = 1/32

b) $X_n = 5+4*n$

$$X_0 = 5 \quad X_3 = 17$$

$$X_1 = 9 \quad X_4 = 21$$

$$X_2 = 13 \quad X_5 = 25$$

2(pag.72). Sa se gaseasca formula termenului al n-lea ($n \geq 1$) pentru fiecare din sirurile :

a) 1, 3, 5, 7, 9, ... ; $\Rightarrow A_n = A_1 + (n-1)*r = 1 + (n-1)*2 = 2*n - 1$

- b) 2, 4, 6, 8, 10, ... ; $\Rightarrow A_n = A_1 + (n-1)*r = 2 + (n-1)*2 = 2*n$
 c) 3, -3, 3, -3, ... ; $\Rightarrow A_n = 3* (-1)^n$ (la puterea n)
 d) 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, ... ; $\Rightarrow A_n = 1/3^n$ (la puterea n)

3(pag.72). Sirul (X_n) , $n \geq 1$, are termenul general dat de formula $X_n = 6 - 4*n$. Este termen al acestui sir numarul :

a) -102 (DA)

$$6 - 4*n = -102 \Rightarrow 4*n = 108 \Rightarrow n = 27$$

b) -132 (NU)

$$6 - 4*n = -132 \Rightarrow 4*n = 138 \Rightarrow n = 138/4 \text{ (nu apartine numerelor naturale)}$$

c) 100

$$6 - 4*n = 100 \Rightarrow 4*n = -94 \Rightarrow n = -94/4 \text{ (nu apartine numerelor naturale)}$$

7(pag.72). Sa se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice (A_n) , daca :

a) $A_1 = 7$, $r = 2$

$$A_2 = A_1 + r = 9$$

$$A_3 = 11$$

$$A_4 = 13$$

b) $A_1 = -3$, $r = 5$

$$A_2 = A_1 + r = 2$$

$$A_3 = 7$$

$$A_4 = 12$$

16(pag.73). Sa se rezolve ecuatiile :

a) $1 + 7 + 13 + \dots + X = 280$

$$A_n = A_1 + (n-1)*r$$

$$X = 1 + (n-1)*6$$

$$X = 6*n - 5$$

$$S_n = (A_1 + A_n)*n/2 = 280$$

$$(A_1 + X) \cdot n/2 = 280 \Rightarrow (1 + 6 \cdot n - 5) \cdot n/2 = 280$$

$$6 \cdot n(\text{la puterea } 2) - 4 \cdot n - 560 = 0$$

$$D = 3364$$

$$\Rightarrow n_1 = 10 ; n_2 = -28 \text{ (nu convine)}$$

$$\Rightarrow X = 6 \cdot 10 - 5 = 55$$

$$b) (X + 1) + (X + 4) + (X + 7) + \dots + (X + 28) = 155$$

$$A_n = A_1 + (n-1) \cdot r$$

$$X + 28 = X + 1 + (n-1) \cdot 3$$

$$27 = (n-1) \cdot 3 \Rightarrow n = 10$$

$$S_{10} = (A_1 + A_{10}) \cdot 10/2 = 155 \Rightarrow 2 \cdot X + 29 = 31 \Rightarrow X = 1$$

20(pag.73). Suma primilor n termeni ai unui sir oarecare (B_n) este data de formula $S_n = n(\text{la puterea } 2) - 2 \cdot n + 5$. Sa se gasesca primii patru termeni ai acestui sir. Este acest sir o progresie aritmetica.

$$S_1 = A_1$$

$$S_2 = A_1 + A_2$$

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3$$

...

$$S_{n-1} = A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}$$

$$S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n$$

$$A_1 = S_1 = 4$$

$$A_2 = S_2 - S_1 = 1$$

$$A_3 = S_3 - S_2 = 3$$

$$A_4 = S_4 - S_3 = 5$$

$$2 \cdot A_2 = A_1 + A_3 \Rightarrow 2 = 3 + 4 \text{ (F)}$$

\Rightarrow Sirul nu este o progresie aritmetica

Progresii geometrice

1.DEFINITIA PROGRESIEI GEOMETRICE

Fie un sir $(B_n)_{n \geq 1}$, $B_1 \neq 0$

Spunem ca termenii sirului (B_n) sunt in progresie geometrica daca fiecare termen incepand cu al doilea se obtine din precedentul inmultit cu un numar constant $q > 0$, numit ratie.

$$B_n = B_{n-1} * q$$

2.NOTATIE : $\therefore (B_n)_{n \geq 1}$

3.PROPRIETATI

P1: Daca avem “ n ” termeni ai unei progresii geometrice atunci B_n este egal cu primul termen ori q la o putere de cati termeni sunt inaintea lui.

$$B_n = B_1 * q^{(n-1)}$$

P2: Daca B_1, B_2, \dots, B_n sunt “ n “ termeni ai unei progresii geometrice atunci produsul termenilor egali departati de extreme este egal cu produsul extremelor.

$$B_1 * B_n = B_2 * B_{n-1} = \dots = B_i * B_{n-i+1}$$

P3: Dacă B_{k-1} , B_k , B_{k+1} sunt trei termeni consecutivi pozitivi ai unei progresii geometrice atunci cel din mijloc este media geometrică a celorlalti doi.

$$B_k(\text{la puterea } 2) = B_{k-1} * B_{k+1}$$

R3: Dacă 3 termeni consecutivi ai unui sir de numere pozitive verifica relatia cel di mijloc este media geometrică a celorlalti doi atunci siruleste o progresie geometrică.

P4: Suma primilor “ n “ termeni consecutivi ai unei progresii geometrice este :

$$S_n = B_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

4.APLICATII

26(pag.73). Sa se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (B_n) dacă :

a) $B_1 = 6$, $q = 2$

$$B_2 = B_1 * q = 12$$

$$B_3 = B_2 * q = 24$$

$$B_4 = B_3 * q = 48$$

$$B_5 = B_4 * q = 96$$

b) $B_2 = -10$, $q = 1/2$

$$B_1 = B_2 / q = -20$$

$$B_3 = B_2 * q = -5$$

$$B_4 = B_3 * q = -5/2$$

$$B_5 = B_4 * q = -5/4$$

27(pag.73). Sa se gaseasca primii doi termeni ai progresiei geometrice (Y_n) , data astfel :

a) $Y_1, Y_2, 24, 36, 54, \dots$;

$$36 = 24 \cdot q \Rightarrow q = 36/24 = 3/2$$

$$24 = Y_2 \cdot q \Rightarrow 24 = Y_2 \cdot 3/2 \Rightarrow Y_2 = 24 \cdot 2/3 = 16$$

$$16 = Y_1 \cdot q \Rightarrow 16 = Y_1 \cdot 3/2 \Rightarrow Y_1 = 32/3$$

b) $Y_1, Y_2, 225, -135, 81, \dots$;

$$-135 = 225 \cdot q \Rightarrow q = -135/225 = -9/17$$

$$225 = Y_2 \cdot q \Rightarrow 225 = Y_2 \cdot -9/17 \Rightarrow Y_2 = -425$$

$$-425 = Y_1 \cdot -9/17 \Rightarrow Y_1 = 7225/9$$

28(pag.784). Daca se cunosc doi termeni ai unei progresii geometrice (B_n) :

a) $B_3 = 6$, $B_5 = 24$, sa se gaseasca B_7, B_9, B_{10} ;

$$B_3 = B_1 \cdot q(\text{la puterea } 2)$$

$$B_5 = B_1 \cdot q(\text{la puterea } 4)$$

$$\Rightarrow 6/24 = q(\text{la puterea } -2) \Rightarrow q = 2$$

$$B_3 = B_1 \cdot q(\text{la puterea } 2) \Rightarrow B_1 = 3/2$$

$$\Rightarrow B_7 = B_1 \cdot q(\text{la puterea } 6) = 3/2 \cdot 64 = 96$$

$$\Rightarrow B_9 = B_1 \cdot q(\text{la puterea } 8) = 3/2 \cdot 256 = 384$$

$$\Rightarrow B_{10} = B_1 \cdot q(\text{la puterea } 9) = 3/2 \cdot 512 = 768$$

30(pag.74). Sa se scrie formula termenului al n-lea al progresiei geometrice date prin :

a) $B_1 = 2$

$$B_{n+1} = 3 \cdot B_n$$

$$B_n = B_1 \cdot q(\text{la puterea } n-1) = 2 \cdot q(\text{la puterea } n-1)$$

$$B_{n+1} = B_n \cdot q \Rightarrow 3 \cdot B_n = B_n \cdot q \Rightarrow q = 3$$

$$\Leftrightarrow B_n = 2/3 \cdot 3(\text{la puterea } n)$$

1. Rezolvati ecuatia : $1+X+X^2+\dots+X^{100} = 0$

$$S_n = 1*(1- X^{101})/(1- X)$$

$$1- X \neq 0 \Rightarrow X \neq 1$$

$$\Rightarrow 1- X^{101} = 0 \Rightarrow X^{101} = 1 \Rightarrow X^{101} = \cos 0 + i*\sin 0$$

$$\Rightarrow X_k = \cos \frac{2k\pi}{101} + i*\sin \frac{2k\pi}{101}$$

$$k=0 \Rightarrow X=1 \text{ (nu convine)}$$

$$k=1 \Rightarrow X=\cos \frac{2\pi}{101} + i*\sin \frac{2\pi}{101}$$

...

$$k=100 \Rightarrow X=\cos \frac{200\pi}{101} + i*\sin \frac{200\pi}{101}$$

2. Intr-o progresie geometrica avem $S_3= 40$, $S_6= 60$. Sa se gaseasca S_9 .

$$S_3 = B_1*(q^3-1)/(q-1)$$

$$S_6 = B_1*(q^6-1)/(q-1)$$

$$\Rightarrow S_3/S_6 = (q^3-1)/(q^6-1) = 2/3$$

$$\Rightarrow 3*q^3-3 = 2*q^6-2$$

$$\Rightarrow 2*q^6+3*q^3-1=0$$

$$\text{Notam: } q^3 = y$$

$$\Rightarrow 2*y^2+3*y-1=0$$

$$\Delta = 17 \Rightarrow y_1=2, y_2=-1$$

$$\Rightarrow q^3=1 \Rightarrow q=1 \text{ (nu convine)}$$

$$\Rightarrow q^3=2 \Rightarrow q=\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow S_3 = B_1*(q^3-1)/(q-1) = 40 \Rightarrow B_1=40(\sqrt[3]{2}-1)$$

$$\Rightarrow S_9 = B_1*(q^9-1)/(q-1) = 280$$

3. Sa se determine x astfel incat numerele $a+x$, $b+x$, $c+x$ sa fie in progresie geometrica.

$$(b+x)^2 = (a+x)*(c+x)$$

$$b^2 + 2bx + x^2 = ac + ax + cx + x^2$$

$$b^2 - ac = x(a + c - 2b)$$
$$\Rightarrow x = (b^2 - ac) / (a + c - 2b)$$

4. Gasiti primul termen si ratia intr-o progresie geometrica daca:

$$A_4 + A_1 = 7/16$$

$$A_3 - A_2 + A_1 = 7/8$$

$$A_1 \cdot q^3 + A_1 = 7/16 \Rightarrow A_1(q^3 + 1) = 7/16$$

$$A_1 \cdot q^2 - A_1 \cdot q + A_1 = 7/8 \Rightarrow A_1(q^2 - q + 1) = 7/8$$

$$\Rightarrow (q^3 + 1) / (q^2 - q + 1) = 1/2 \Rightarrow q + 1 = 1/2 \Rightarrow q = -1/2$$

$$\Rightarrow A_1(-1/8 + 1) = 7/16 \Rightarrow A_1 = 1/2$$