

METODA INDUCTIEI MATEMATICE
COMPLETE. ANALIZA COMBINATORIE. BINOMUL LUI
NEWTON. SUME.

1. METODA INDUCTIEI MATEMATICE COMPLETE

Este o metoda de rationament prin care stabilim ca:

O proprietate $P(n)$ care depinde de un numar natural n este verificata pentru orice numar natural $n \geq k$ atunci sunt satisfacuate simultan conditiile:

- a) Proprietatea $P(n)$ este adevarata pentru $n=k$; $k \in \mathbb{N}$
- b) $(P(k), k \leq n) \Rightarrow P(n+1)$, $(\forall) n \geq k$, adica presupunem $P(k)$ adevarata pentru orice $k \leq n$ rezulta $p(n+1)$ adevarata, pentru orice $n \geq k$.

2. PERMUTARI

Fie $E = \{1, 2, \dots, n\}$ o multime finita cu n elemente. Se numeste permutare a multimii E orice functie bijectiva $f : E \rightarrow E$.

Notam permutarea in felul urmator

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

Notam numarul de permutari P_n :

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$$

conditie de existenta:

$$n \in \mathbb{N}$$

conventie:

$$0! = 1 ; 1! = 1$$

$$P_n = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

3. ARANJAMENTE

Notam cu A_n^k

Sistemele ordonate cu k elemente, care se pot forma cu elementele unei multimii cu n elemente ($n \geq k$), se numesc aranjamente de n elemente luate cate k .

$$A_n^k = n! / (n-k)! = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = (n-k+1)A_n^{k-1}$$

c.e. $n \geq k$

conventie: $n=k \Rightarrow A_n^n = P_n$

4. COMBINARI C_n^k

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k} = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

conventie: $C_n^0 = C_n^n = 1$ c.e. $n \geq k$

Formule pentru combinari complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$
 $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

5. BINOMUL LUI NEWTON

Daca $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, atunci:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

sau

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

T_{k+1} = termen general

k = se numeste rangul termenului al dezvoltarii

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^{n-k} C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n$$

sau

$$(a-b)^n = (-1)^k \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n T_{k+1}, \text{ unde } T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

Obs: 1) in dezvoltarea $(a+b)^n$, dupa formula lui Newton, sunt $n+1$ termeni.

2) $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ se numesc coeficienti binomiali

3) Sa se faca distinctie intre coeficientul unui termen al dezvoltarii si coeficientul binomial al aceluasi termen.

4) Pentru a determina rangul celui mai mare termen folosim relatia:

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \frac{b}{a} \text{ si studiem doua cazuri:}$$

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \geq 1 \quad \text{si} \quad \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$$

5) In dezvoltarea $(a+b)^n$ si $(a-b)^n$, daca $a=b$ atunci:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

6) Identitatile utile:

a) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$

b) $C_{n+k}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0$

7) Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale

Fie $k \geq 1$ un numar natural si $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$

$$a) S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Folosim dezvoltarea $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ pentru demonstratie unde $a=1,2,\dots,n$.

$$b) S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Folosim dezvoltarea $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, pentru demonstratie, unde $a=1,2,\dots,n$.

$$c) S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Folosim dezvoltarea $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$, pentru demonstratie, unde $a=1,2,\dots,n$

$$d) S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - (n+1) - \sum_{p=2}^k C_{k+1}^p \cdot S_{p-1}}{C_{k+1}^1}$$

Caz particular

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

6. PROGRESII ARITMETICE SI GEOMETRICE

a) PROGRESII ARITMETICE ☺

Teorema : Fie numerele a_{n-1}, a_n, a_{n+1} in progresie aritmetica. Atunci:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

Def: Fie numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ in progresie aritmetica, daca $a_n = a_1 + (n-1)r$ sau $a_n = a_{n-1} + r$, unde:

a_n = ultimul termen

a_1 = primul termen

a_{n-1} = penultimul termen

n = numarul de termeni

r = ratia progresiei aritmetice

Obs: Pentru verificare $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$

$$P: S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2}$$

Teorema: Fie numerele b_{n-1} , b_n , b_{n+1} in progresie geometrica. Atunci
$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

b) PROGRESII GEOMETRICE ∞∞

Def: Fie numerele b_1, b_2, \dots, b_n in progresie geometrica, daca $b_n = b_1 \cdot q^n$ sau $b_n = b_{n-1} \cdot q$ unde: b_n =ultimul termen

b_1 =primul termen

b_{n-1} =penultimul termen

n =numarul de termeni

q =ratia progresiei geometrice

Obs: pentru verificare $q = a_2/a_1 = a_3/a_2 = \dots = a_n/a_{n-1}$

$$P: S_n = b_1(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$