INTEGRALE DEFINITE

SUME RIEMANN

Definitie: Se da colectia de obiecte:

- [a,b] – interval inchis
- Δ– diviziune a intervalului [a,b]
  $\Delta = (a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$
- $f:[a,b]\to R$
- ξ_I – un sistem de puncte intermediare cuprins in intervalul [a,b]
  $\xi_I \in [x_{i-1},x_i]$

Numim ***suma Riemann*** atasata functiei f, diviziunii Δ si sistemului de puncte intermediare ξ_I numarul notat:

$$\sigma_\Delta(f,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)*(x_i-x_{i-1})$$

INTEGRALE IN SENS RIEMANN

Definitie: Se da $f:[a,b]\to R$. Spunem ca functia f este ***integrabila in sens Riemann*** daca $\exists\ i_f \in R$ a.i. $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \eta_\varepsilon>0$ cu proprietatea ca $\forall\ \Delta$ o diviziune a intervalului [a,b] si (ξ_i) un sistem de puncte intermediare, $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ cu $\|\Delta\|<\eta_\varepsilon$ sa avem $|\sigma_\Delta(f,\xi_i) - i_f|<\varepsilon$.

i_f – se numeste integrala definita a functiei f pe intervalul [a,b]

notez: $i_f = \int_a^b f(x)*dx$.

Obs:

1) Numarul real i_f este unic; $\int_a^b f(x)*dx$ este unica.

Demonstratie:

P.p.a. ca $\exists\ i_1\neq i_2$ care verifica conditiile din definitie, atunci pentru $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \eta_{k,\varepsilon}>0$ (k=1,2) astfel incat pentru orice diviziune:
$\Delta=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ a lui [a,b] cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ si orice puncte intermediare $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ $(1 \le i \le n)$ sa avem:

$$|\sigma_\Delta(f,\xi)-i_k|<\varepsilon/2 \qquad (k=1,2).$$

Luand $\eta_\varepsilon = \min(\eta_{1,\varepsilon}, \eta_{2,\varepsilon})$ rezulta ca pentru orice diviziune Δ a lui [a,b] cu $\|\Delta\|<\eta_\varepsilon$ si orice sistem (ξ_i) de puncte intermediare asociat lui Δ, avem:

$$|\sigma_\Delta(f,\xi)-i_1| < \varepsilon/2 \text{ si } |\sigma_\Delta(f,\xi)-i_2| < \varepsilon/2,$$

deci: $$|i_1- i_2| < |i_1- \sigma_\Delta(f,\xi)| + |\sigma_\Delta(f,\xi)-i_2| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost luat arbitrar, rezulta $i_1=i_2$; dar din ipoteza $i_1 \neq i_2 \Rightarrow$ contradictie.
Deci $\mathbf{i_f}$ este **unic**.

2) $f:[a,b] \to R$
f – <u>integrabila</u> in sens Riemann pe [a,b] $\Rightarrow$ f <u>marginita</u> pe [a,b]

Demonstratie:
f – integrabila pe [a,b] $\Rightarrow \exists\, i_f \in R$ a.i. $\forall\, \Delta$ o diviziune a lui [a,b] si $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \eta_\varepsilon>0$ pentru care $\|\Delta\|<\eta_\varepsilon \Rightarrow \quad |\sigma_\Delta(f,\xi_i) - i_f| < \varepsilon \qquad \forall\, \xi_i$ un sistem de puncte intemediare.

Arat ca f este marginita pe $[x_{k-1},x_k]$

Fie $\xi_i = \begin{cases} x, & i \neq k \\ x_i, & i=k \end{cases}$

$$\sigma_\Delta(f,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)*(x_i-x_{i-1}) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} f(x_i)*(x_i-x_{i-1}) + f(x)*(x_k-x_{k-1})$$

$|\sigma_\Delta(f,\xi_i) - i_f| < \varepsilon$
$-\varepsilon < \sigma_\Delta(f,\xi_i) - i_f < \varepsilon \quad /+ i_f$
$-\varepsilon + i_f < \sigma_\Delta(f,\xi_i) < \varepsilon + i_f$

$$-\varepsilon + i_f < \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} f(x_i)*(x_i-x_{i-1}) + f(x)*(x_k-x_{k-1}) < \varepsilon + i_f$$

$$\underbrace{1/(x_k-x_{k-1})*[-\varepsilon + i_f - \Sigma f(x_i)*(x_i-x_{i-1})]}_{M_1} < f(x) < \underbrace{1/(x_k-x_{k-1})*[-\varepsilon + i_f - \Sigma f(x_i)*(x_i-x_{i-1})]}_{M_2}$$

$M_1 < f(x) < M_2$
$\Rightarrow$ f – marginita pe $[x_{k-1},x_k] \quad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\} \qquad \Rightarrow \qquad$ f – marginita pe [a,b]

3) $f,g:[a,b] \to R$
$A \subset [a,b]$
A finita, cu proprietea:
i) g integrabila pe [a,b]
ii) $f(x)=g(x)\ \forall x \in [a,b] \setminus A$

atunci: a) f – integrabila pe [a,b]

b) $\int_a^b g(x)*dx = \int_a^b f(x)*dx$

Demonstratie:
Este suficient ca demonstratia sa fie facuta pentru cazul cand multimea finita A este formata dintr-un singur punct c, deoarece cazul general se poate obtine din acesta prin inductie. Presupunem deci A={c}.
Functia g fiind integrabila, este marginita, deci $\exists\, M_1 \geq 0$ astfel incat:

$$|g(x)| \le M_1 \qquad \forall\ x \in [a,b]$$

Luand $M = \max(M_1, |f(c)|)$ $\Rightarrow$ $f(x) \le M$ si $g(x) \le M$ $\forall\ x \in [a,b]$.
g – integrabila $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta'_\varepsilon > 0$ a.i.:

$$1) \quad | \sigma_\Delta(g,\xi_i) - \int_a^b g(x)*dx | < \varepsilon/2$$

$\forall\ \Delta = (x_0, x_1,\ldots,x_n)$, cu $||\Delta|| < \eta'_\varepsilon$ si $\forall$ sistemul de puncte intermediare ξ_i.
Luand $\eta_\varepsilon = \min (\eta'_\varepsilon, \varepsilon/(8*M))$, avem $\eta_\varepsilon \le \eta_\varepsilon$ si $4*M*\eta_\varepsilon \le \varepsilon/2$.

Daca c este un punct al diviziunii Δ, atunci $\exists\ 0 \le i \le n$ astfel incat $c = x_j$. In acest caz singurele puncte intermediare care ar putea coincide cu c sunt punctele ξ_j sau ξ_{j+1}. Deci tinand seama de faptul ca $f(x) = g(x)\ \forall\ x \ne c$, obtinem:

$$| \sigma_\Delta(g,\xi_i) - \sigma_\Delta(f,\xi_i) | = | \Sigma (g(\xi_i) - f(\xi_i))*(x_i - x_{i-1})| \le | g(\xi_j) - f(\xi_j)|*(x_j - x_{j-1}) + | g(\xi_{j+1}) - f(\xi_{j+1})|*(x_{j+1} - x_j) \le 4*M*||\Delta|| < 4*M*\eta_\varepsilon < \varepsilon/2$$

Daca c nu este punct al diviziunii Δ, atunci c este continut intr-un interval deschis (x_{k-1},x_k). Deci singurul punct intermediar care ar putea coincide cu c este punctul ξ_k, prin urmare:

$$| \sigma_\Delta(g,\xi_i) - \sigma_\Delta(f,\xi_i) | = | \Sigma (g(\xi_i) - f(\xi_i))*(x_i - x_{i-1})| \le | g(\xi_k) - f(\xi_k)|*(x_k - x_{k-1}) \le 2*M*||\Delta|| \le 2*M*\eta_\varepsilon < \varepsilon/2$$

Din analiza facuta pana acum rezulta ca:

$$2) \quad | \sigma_\Delta(g,\xi_i) - \sigma_\Delta(f,\xi_i) | < \varepsilon/2$$

Din 1) si 2) obtinem:

$$| \sigma_\Delta(f,\xi_i) - \int_a^b g(x)*dx | < \varepsilon$$

adica f este integrabila si: $\int_a^b f(x)*dx = \int_a^b g(x)*dx$.

EXEMPLE:

1) $f:[a,b]\to R$
   $f(x) = k$

$\Rightarrow$ f – integrabila si $\int_b^a k*dx = k*(b-a)$

$\exists\ i_f = k*(b-a)$ a.i. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea ca $\forall\ \Delta= (x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b)$ si $\forall\ \xi_i \in[x_{i-1},x_i]$, $||\Delta||<\eta_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_\Delta(f,\xi_i) - i_f |<\varepsilon$

$$\sigma_\Delta(f,\xi_i) = \Sigma f(\xi_i)*(x_i-x_{i-1}) = \Sigma k(x_i-x_{i-1}) = k*\Sigma (x_i-x_{i-1}) = k(x_1-x_0+x_2-x_1+\ldots+x_n-x_{n-1}) = k*(x_n - x_0) = k*(b-a)$$

$|\sigma_\Delta(f,\xi_i) - i_f| = |k*(b-a) - k*(b-a)| = 0 < \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon>0.$

2) f,g:[a,b]$\rightarrow$ R

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x\in Q \\ -1, \text{ pentru } x\in R\setminus Q \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1, \text{ pentru } x\in Q \\ 1, \text{ pentru } x\in R\setminus Q \end{cases}$$

f,g – nu sunt integrabile

Demonstratie pentru f(x) :
Fie $\Delta = (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$, avem:

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \begin{cases} \Sigma\ 1*(x_i - x_{i-1}) = b-a, \text{ pentru } \xi_i \in Q \\ \Sigma\ (-1)*(x_i - x_{i-1}) = a-b, \text{ pentru } \xi_i \in R\setminus Q \end{cases}$$

Cum limita sumelor integrale depinde de alegerea punctelor ξ_i, functia nu este integrabila.
Demonstratia se face analog pentru g(x).

Desi f,g nu sunt integrabile functiile:
$(f+g)(x) = 0\ \forall x\in[a,b]$
$(f*g)(x) = -1\ \forall x\in[a,b]$
$(f\circ g)(x) = 1\ \forall x\in[a,b]$
sunt integrabile ca fiind functii constante.

3) Sa se cerceteze integrabilitatea functiei:

$$G(x) = \begin{cases} 0, \text{ daca x este irational sau } x = 0 \\ 1/q, \text{ daca } x = p/q,\ p/q \text{ fractie ireductibila} \end{cases}$$

Rezolvare: Functia este integrabila pe segmentul [0,1]. Intr-adevar fie *N* un numar ales arbitrar. Sa consideram multimea tuturor punctelor rationale din intervalul [0,1] avand numitorul mai mic decat *N*. Exista un numar finit de astfel de puncte, fie acesta *k*. Fie Δ o diviziune arbitrara a segmentului [0,1]. Exista cel mult 2*k* intervale partiale (pe care le notam $d_1', d_2', \ldots, d_{2k}'$) care sa contina cele *k* puncte considerate anterior. Fiind dat $\varepsilon>0$, vom alege diviziunea in asa fel incat suma lungimilor celor 2*k* intervale sa fie inferioara numarului $\varepsilon/2$. Aceasta se poate realiza alegand norma diviziunii suficeint de mica. Notam $d_1'', d_2'', \ldots d_{2m}''$ celelalte intervale partiale ale diviziunii. Intervalele d_i'' (i = 1, 2, …, m) contin, in afara de puncte irationale in care valoarea functiei este 0, puncte rationale de forma x = p/q, q>*N*, si astfel ca G(p/q) = =1/q<1/*N*. Deci :

$$S_d(G) - s_d(G) = \sum_{i=1}^{2k} (M_i' - m_i')\sigma_i' + \sum_{i=1}^{m} (M_i'' - m_i'')\sigma_i''$$

Am notat cu M_i', respectiv m_i' marginea supearioara, respectiv marginea inferiaora a functiei in intervalul d_i' si cu M_i'', respectiv m_i'' marginea supearioara, respectiv marginea inferiaora a functiei in intervalul d_i'', σ_i' este lungimea lui d_i', iar σ_i'' este lungimea lui d_i''.

Deoarece $M_i' - m_i'<1$, $m_i'' = 0$, $M_i''<1/N$, $\forall$ i, avem

2*k* m

$$S_d(G) - s_d(G) < \sum_{i=1} \sigma_i' + (1/N)*\sum_{i=1} \sigma_i'' < \varepsilon/2 + 1/N.$$

Daca $N > 2/\varepsilon$, atunci $1/N < \varepsilon/2$ si $S_d(G) - s_d(G) < \varepsilon$.

Putem calcula efectiv valoarea integralei. Deoarece in orice interval valoarea minima a functiei este 0, avem $s_d(G) = 0$, $\forall\ \Delta$; rezulta $\underline{I} = \underline{\int_0^1} G(x)dx = 0$. Datorita integrabilitatii functiei G, avem :

$$\int_0^1 G(x)dx = 0.$$

Integrabilitatea functiei se mai putea stabili tinand seama de faptul ca multimea punctelor ei de discontinuitate este multimea numerelor rationale care este numarabila, deci neglijabila.