Sisteme de ecuatii liniare

Sisteme de doua ecuatii cu doua necunoscute

Def.Un sistem de doua ecuatii cu doua necunoscute are forma

$$(S):\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

unde a_1,b_1,a_2,b_2 se numesc coeficientii necunoscutelor , iar c_1,c_2 termenii liberi.

Def.Se numeste solutie a sistemului orice cuplu (s_1 , s_2) care este solutie pentru fiecare din ecuatiile sistemului.

Studiul solutiilor unui sistem de ecuatii liniare conduce la trei probleme:
- existenta solutiilor (conditiile in care un sistem admite solutii)
- gasirea unei metode de obtinere a solutiilor
- determinarea tuturor solutiilor

Un sistem care nu are nici o solutie se numeste incompatibil.Daca sistemul poseda solutii se spune ca este compatibil (determinat cu o solutie si nedeterminat cu mai mult de o solutie)

Doua sisteme sunt echivalente daca sunt amandoua incompatibile sau sunt amandoua compatibile si au aceleasi solutii.

Metoda de rezolvare a unui sistem liniar consta in a inlocui sistemul dat printr-un nou sistem care este echivalent cu primul , dar care poate fi rezolvat mai usor.

Transformari aupra ecuatiilor unui sistem

O1)Adunarea unei ecuatii a sistemului la o alta ecuatie a sistemului
O2)Inmultirea ecuatiilor sistemului prin factori nenuli
O3)Schimbarea ordinii ecuatiilor intr-un sistem

Metode de rezolvare

1.Metoda combinatiilor liniare (metoda reducerii)
2.Metoda substitutiei
3.Metoda eliminarii (Gauss)
4)Regula lui Cramer

A = $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ - matricea sistemului (formata din coeficienti necunoscutelor)

$\Delta = \det(A) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ - determinantul sistemului
$\Delta \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui x , prin coloana termenilor liberi)

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui y , prin coloana termenilor liberi)

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

5)Metoda matricii inverse
A = $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
AX = C – scrierea matriciala a sistemului

Sisteme liniare omogene

Sistemul $(S): \begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases}$ in care termenii liberi sunt zero se numeste sistem liniar omogen.

Intotdeauna acest sistem este compatibil avand cel putin solutia banala (cu toate componentele egale cu zero) x = y = 0.

Daca $\Delta = \det(A) \neq 0$ atunci (formulele lui Cramer) sistemul are numai solutia banala.In acest caz sistemul este compatibil determinat.

Daca $\Delta = \det(A) = 0$ atunci sistemul are si alte solutii diferite de cea banala.Sistemul este compatibil nedeterminat.

Sisteme de trei sau patru ecuatii cu doua necunoscute

Se poate rezolva sistemul format din doua ecuatii ale sistemului dat ,apoi se verifica daca solutiile obtinute sunt si solutii ale celorlalte ecuatii ale sistemului.

Sisteme de trei ecuatii cu trei necunoscute

Def.Un sistem de trei ecuatii cu trei necunoscute are forma $(S):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$,

unde

a_i , b_i , c_i se numesc coeficientii necunoscutelor , iar d_i termenii liberi ai sistemului.
Def.Se numeste solutie a sistemului orice triplet (s_1 , s_2 , s_3) care este solutie pentru fiecare ecuatie a sistemului.

Interpretare geometrica

Cum fiecare ecuatie a sistemului este ecuatia unui plan in spatiul cartezian Oxyz , se poate interpreta geometric sistemul compatibil determinat prin concurenta planelor intr-un punct , iar sistemul compatibil nedeterminat prin ocncurenta planelor dupa o dreapta (sistem simplu determinat) sau dupa un plan (sistem dublu nedeterminat – cele trei plane coincid).In fine sistemul incompatibil corespunde celorlalte situatii ale planelor in spatiu (plane paralele , doua plane paralele intersectate de al treilea , plane concurente doua cate doua , fara punct comun pentru cele doua drepte etc.)

Doua sisteme sunt echivalente daca sunt amandoua incompatibile sau sunt amandoua compatibile si au aceleasi solutii.

Metode de rezolvare

1)Metoda combinatiilor liniare
2)Metoda eliminarii (Gauss)

Utilizand metoda lui Gauss (de eliminare succesiva a necunoscutelor prin transformari elementare) se ajunge de la sistemul initial la unul echivalent avand urmatoarea forma tiunghiulara :

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & ... & ... & ... & ... \\ L_2 & 0 & ... & ... & ... \\ L_3 & 0 & 0 & ... & ... \end{array}$$

Etapele necesare de parcurs pentru a obtine forma triunghiulara a sistemuli (S)

$(S):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ si tabloul $\begin{array}{ccccc} & x & y & z & \\ L_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ L_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ L_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$

Daca $a_1 \neq 0$, atunci prima ecuatie a sistemului ramane pe loc , iar zerourile de pe prima coloana le obtinem cu transformarile :

- ecuatia L_2 se inlocuieste prin ecuatia $L_2 - \frac{a_2}{a_1} L_1$

- ecuatia L_3 se inlocuieste prin ecuatia $L_3 - \frac{a_3}{a_1} L_1$

Pentru a obtine zeroul de pe colana a doua se face transformarea :

- ecuatia L_3 se inlocuieste prin ecuatia $L_3 - \frac{b_3}{b_1} L_2$

Daca $a_1 = 0$, atunci se ia drept ecuatie L_1 o alta ecuatie care sa aiba coeficientul lui x diferit de zero (se face o schimbare a doua ecuatii intre ele)

Pentru sistemul (S) doua matrici joaca un rol important in studiul lui.

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ - matricea sistemului

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right)$ - matricea extinsa a sistemului

3) Regula lui Cramer

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ - determinantul sistemului

$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui x , prin coloana termenilor liberi)

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui y , prin coloana termenilor liberi)

$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui z , prin coloana termenilor liberi)

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}; y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}; z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

4) Metoda matricii inverse

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

AX = C – scrierea matriciala a sistemului

Daca $\det(A) \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}C$

Sisteme liniare omogene

Sistemul $(S): \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ se numeste sistem liniar omogen

Intotdeauna acest sistem este compatibil avand cel putin solutia banala (cu toate componentele egale cu zero) x = y = z = 0.

Daca $\Delta = \det(A) \neq 0$ atunci (formulele lui Cramer) sistemul are numai solutia banala.In acest caz sistemul este compatibil determinat.

Daca $\Delta = \det(A) = 0$ atunci sistemul are si alte solutii diferite de cea banala.Sistemul este compatibil nedeterminat.

Sisteme de m ecuatii cu n necunoscute

$$\text{Au forma :}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

Daca un sistem are solutii , atunci il numim compatibil (determinat daca are exact o solutie si nedeterminat daca sistemul are mai mult de o solutie)

Sistemul (2) se numeste omogen daca are toti termenii liberi egali cu zero.Sistemul astfel obtinut

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ se numeste sistemul omogen asociat sistemului (2).

Coeficientii necunoscutelor formeaza o matrice de tip m x n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ numita matricea sistemului (2)

Daca $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ sunt coloana necunoscutelor si respectiv coloana termenilor liberi , atunci sistemul (2) se poate scrie sub forma matriciala AX = C.

Doua sisteme sunt echivalente daca sunt amandoua incompatibile sau sunt amandoua compatibile si au aceleasi solutii.

Discutia unui sistem

Compatibilitatea

Th.Kronecker – Capelli . Sistemul liniar (2) este compatibil daca si numai daca rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii extinse.

Comform teoremei avem nevoie de calculul rangului matricii A.Daca rang(A) = r , atunci exista cel putin un minor nenul de ordin r.Pentru usurinta in prezentare sa presupunem ca minorul nenul de ordin r este format din primele r linii si primele r coloane.Pe acesta (considerat) il numim determinant principal si-l notam Δ_p .Ca sa avem egalitatea rang(A) = rang($\overline{A}$) trebuie probat ca orice minor al matricii $\overline{A}$ care-l contine pe cel principal si care nu este minor al lui A este nul.Orice astfel de minor de ordin r + 1 , obtinut prin bordarea determinantului principal cu elemente corespunzatoare ale coloanei termenilor liberi , precum si cu cele ale uneia din liniile ramase , se numeste minor caracteristic.Vom nota un astfel de minor prin $\Delta_{car,k}$, unde k indica linia utilizata pentru bordare.

Th.(Rouche) . Sistemul liniar (2) este compatibil daca si numai daca toti minorii caracteristici sunt nuli.

Deci daca cel putin un minor caracteristic este nenul sistemul este incompatibil.

Determinarea solutiilor

Presupunem ca rang(A) = r si ca am ales ca determinant principal al sistemului compatibil $\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$.De precizat ca odata ales determinantul principal cu el se merge pana la determinarea solutiilor.Necunoscutele ale caror coeficienti sunt in determinantul principal se numesc necunoscute principale.Deci in cazul nostru acestea sunt x_1 , x_2 , ..., x_r.Celelalte necunoscute (daca exista) adica x_{n+1} , ... , x_n se numesc necunoscute secundare.

Ecuatiile ale caror coeficienti se afla in determinantul principal se numesc ecuatii principale.In aczul de fata primele r ecuatii sunt principale.Celelalte ecuatii (daca exista) se numesc ecuatii secundare.

Se rezolva sistemul format din ecuatiile principale : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$ (*)

Solutiile acestui sistem sunt solutii si pentru (2) (din rang(A) = rang($\overline{A}$) , rezulta ca celelalte linii sunt combinatii liniare ale ecuatiilor principale , ceea ce arata ca o solutie a sistemului de mai sus este solutie si pentru (2)).

Analizam cazurile :

- daca r = n , atunci sistemul (*) are atatea ecuatii cate necunoscute.Pentru rezolvare se pot aplica formulele lui Cramer : $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_p}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta_p}; \dots; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta_p}$, unde Δ_{x_n} se obtine din Δ_p inlocuind coloana coeficientilor lui x_n cu termenii liberi.

- daca r < n , atunci in ecuatiile principale se inlocuiesc necunoscutele secundare variabil $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, \dots, x_n = \lambda_n; \lambda_k \in R$ si se rezolva sistemul format din ecuatiile principale (in care necunoscutele secundare trec in membrul drept).Pentru rezolvare se aplica regula lui Cramer.