Împărţirea prin X-a .Schema lui Horner

T1:Restul împărţirii unui polinom f <> 0 prin polinomul X-a este egal cu valoarea f(a) a polinomului f în a.

Demonstraţie:
-aplicăm teorema împărţirii cu rest

➔ $f = (X - a)\, q + r$,unde grad de r < grad (X – a) =1 (1)

➔ grad r <= 0 (nr. Complex)

în 1 facem X=a ➔ $f(a) = (a - a)\, q(a) + r(a)$
➔ $f(a) = r(a)$

dar $r(a)$=polinom constant $r(a) = r$ ➔ $r = f(a)$

Această teoremă ne ajută să găsim restul împărţirii unui polinom oarecare prin polinomul X-a fără a mai face împărţirea.

Ex: Să se găsească restul împărţirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$ prin binomul X-2.

$$R = f(2) = 2^3 - 2*2^2 + 2 + 1 = 3.$$

Teorema are dezavantajul că nu ne spune nimic asupra cîtului împărţirii polinomului f prin X-a.
Procedeu de aflare a câtului :

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$f = (X - a)\, q + r \quad (2)$$

grad $f = n$ ➔ grad $q = n - 1$

$\Rightarrow q = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \ldots + b_0$

(2) $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 = (X - a)(b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \ldots + b_0) + r$

$(X - a)(b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \ldots + b_0) = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \ldots + b_0 X - ab_{n-1} X^{n-1} -$

$- ab_{n-2} X^{n-2} - \ldots - ab_0$

$= b_{n-1} X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) X^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}) X^{n-2} + \ldots + (b_0 - ab_1) X - ab_0$

(2) $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 = b_{n-1} X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) X^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}) X^{n-2} +$

$+ \ldots + (b_0 - ab_1) X - ab_0$

$a_n = b_{n-1}$

$a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$

$\Rightarrow$ $a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}$ (3)

……………………………..

$a_1 = b_0 - ab_1$

$a_0 = r - ab_0$

$b_{n-1} = a_n$

$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$

$\Rightarrow$ $b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$ (4)

……………………………..

$b_0 = a_1 + ab_1$

$r = a_0 + ab_0$

X^n a_n	X^{n-1} a_{n-1}	X^{n-2} a_{n-2}	……………….. …………………	X^1 a_1	X^0 a_0
a_n	$a_{n-1}+ab_{n-1}$	$a_{n-2}+ab_{n-2}$	…………………	a_1+ab_1	a_0+ab_0
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…………………	b_0	r

Observaţie:schema lui Horner ne oferă doar un procedeu de obţinere al câtului nu şi unul de determinare a restului!