PROGRESII ARITMETICE

1.DEFINITIA PROGRESIEI ARITMETICE

Un sir de numere (A_1 ,A_2 ,… ,A_n ; $n>=1$) in care fiecare termen incepand cu al doilea ,se obtine din cel precedent prin adaugarea unui numar constant “ r ” ,numit ratie ,se numeste progresie aritmetica .

$A_{n+1} = A_n + r$

2.NOTATIE : An -:

3.PROPRIETATI

P1: Intr-o progresie aritmetica termenul general An este egal cu primul termen plus de atatea ori ratia cati termeni sunt inaintea sa.

$$A_n = A_1 + (n-1) * r$$

P2: Intr-o progresie aritmetica suma termenilor egali departati de extreme este egala cu suma extremelor .

$$A_1 + A_n = A_2 + A_{n-1} = \dots = A_i + A_{n-i+1}$$

P3: Daca avem trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cel din mijloc este media aritmetica a celorlalti doi .

$$A_k = (A_{k-1} + A_{k+1}) / 2$$

P4: Suma termenilor a unei progresii aritmetice cand se da primul termen si ultimul termen :

$$S_n = (A_1 + A_n) * n / 2$$

P5: Suma termenilor a unei progresii aritmetice cand se da primul termen si ratia :

$$S_n = [2*A_1 + (n-1)*r]*n/2$$

4.APLICATII

1(pag71).Sa se scrie primii cinci termeni ai sirului ,cu termenul al n-lea dat de formula :

An = 2(la puterea „-n “)
A0 = 2(la puterea „0“) = 1
A1 = 2(la puterea „-1“) = 1/2
A2 = 2(la puterea „-2“) = 1/4
A3 = 2(la puterea „-3“) = 1/8
A4 = 2(la puterea „-4“) = 1/16
A5 = 2(la puterea „-5“) = 1/32

Xn = 5+4*n
X0 = 5 X3 = 17
X1 = 9 X4 = 21
X2 = 13 X5 = 25

2(pag.72). Sa se gaseasca formula termenului al n-lea (n>=1) pentru fiecare din sirurile :

1, 3, 5, 7, 9, … ; => An = A1 + (n-1)*r = 1 + (n-1)*2 = 2*n -1
2, 4, 6, 8, 10, … ; => An = A1 + (n-1)*r = 2 + (n-1)*2 = 2*n
3, -3, 3, -3, … ; => An = 3* (-1)(la puterea n)
1/3, 1/9, 1/27, 1/81, … ; => An = 1/3(la puterea n)

3(pag.72). Sirul (Xn), n>=1, are termenul general dat de formula
Xn = 6- 4*n .Este termen al acestui sir numarul :

-102 (DA)
6- 4*n = -102 => 4*n = 108 => n = 27
-132 (NU)
6- 4*n = -132 => 4*n = 138 => n = 138/4 (nu apartine numerelor naturale)
100
6- 4*n = 100 => 4*n = -94 => n = -94/4 (nu apartine numerelor naturale)

7(pag.72). Sa se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice (An), daca :

A1 = 7 , r = 2
A2 = A1 + r = 9
A3 = 11
A4 = 13
A1 = -3 , r = 5
A2 = A1 + r = 2
A3 = 7
A4 = 12

16(pag.73). Sa se rezolve ecuatiile :

1 + 7 + 13 + … +X = 280

$An = A1 + (n-1)*r$
$X = 1 + (n-1)*6$
$X = 6*n -5$
$Sn = (A1 + An)*n/2 = 280$
$(A1 + X)*n/2 = 280 \Rightarrow (1 + 6*n-5)*n/2 = 280$
6*n(la puterea 2) -4*n -560 = 0
$D = 3364$
=> n1 = 10 ; n2 = -28 (nu convine)
=>X = 6*10 -5 = 55

$(X + 1) + (X+ 4) + (X + 7) + \ldots + (X + 28) = 155$
$An = A1 + (n-1)*r$
$X + 28 = X + 1 + (n-1)*3$
$27 = (n-1)*3 \Rightarrow n = 10$
$S10 = (A1 + A10)*10/2 = 155 \Rightarrow 2*X + 29 = 31 \Rightarrow X = 1$

20(pag.73). Suma primilor n termeni ai unui sir oarecare (Bn) este data de formula Sn = n(la puterea 2) -2*n + 5. Sa se gasesca primii patru termeni ai acestui sir. Este acest sir o progresie aritmetica.

$S1 = A1$
$S2 = A1 + A2$
$S3 = A1 + A2 + A3$
…
$Sn-1 = A1 + A2 + \ldots + An-1$
$Sn = A1 + A2 + \ldots + An-1 + An$

$A1 = S1 = 4$
$A2 = S2 - S1 = 1$
$A3 = S3 - S2 = 3$
$A4 = S4 - S3 = 5$
$2*A2 = A1 + A3 \Rightarrow 2 = 3 + 4$ (F)
=>Sirul nu este o progresie aritmetica

PROGRESII GEOMETRICE

1.DEFINITIA PROGRESIEI GEOMETRICE

Fie un sir (Bn) n>=1 , B1<>0

Spunem ca termenii sirului (Bn) sunt in progresie geometrica daca fiecare termen incepand cu al doilea se obtine din precedentul inmultit cu un numar constant q >0, numit ratie.

$$Bn = Bn-1 * q$$

2.NOTATIE : :-: (Bn) n>=1

3.PROPRIETATI

P1: Daca avem " n " termeni ai unei progresii geometrice atunci Bn este egal cu primul termen ori q la o putere de cati termeni sunt inaintea lui.

$$Bn = B1 * q(\text{la puterea } n-1)$$

P2: Daca B1, B2, … , Bn sunt " n " termeni ai unei progresii geometrice atunci produsul termenilor egali departati de extreme este egal cu produsul extremelor.

$$B1*Bn = B2*Bn-1 = \ldots = Bi*Bn-i+1$$

P3: Daca Bk-1, Bk, Bk+1 sunt trei termeni consecutivi pozitivi ai unei progresii geometrice atunci cel din mijloc este media geometrica al celorlalti doi.

$$Bk(\text{la puterea } 2) = Bk-1*Bk+1$$

R3: Daca 3 termeni consecutivi ai unui sir de numere pozitive verifica relatia cel di mijloc este media geometrica a celorlalti doi atunci siruleste o progresie geometrica.

P4: Suma primilor " n " termeni consecutivi ai unei progresii geometrice este :

$$Sn = B1 * q(\text{la puterea } n)-1/q-1$$

4.APLICATII

26(pag.73). Sa se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (Bn) daca :

B1 = 6 , q = 2

B2 = B1*q = 12
B3 = B2*q = 24
B4 = B3*q = 48
B5 = B4*q = 96

b) B2 = -10 , q = 1/2
B1 = B2/q = -20
B3 = B2*q = -5
B4 = B3*q = -5/2
B5 = B4*q = -5/4

27(pag.73). Sa se gaseasca primi doi termeni ai progresiei geometrice (Yn) , data astfel :

Y1, Y2, 24, 36, 54, … ;
36 = 24*q => q = 36/24 = 3/2
24 = Y2*q => 24 = Y2*3/2 => Y2 = 24*2/3 = 16
16 = Y1*q => 16 = Y1*3/2 => Y1 = 32/3

Y1, Y2, 225, -135, 81, … ;
-135 = 225*q => q = -135/225 = -9/17
225 = Y2*q => 225 = Y2*-9/17 => Y2 = -425
-425 = Y1*-9/17 => Y1 = 7225/9

28(pag.784). Daca se cunosc doi termeni ai unei progresii geometrice (Bn) :

B3 = 6 , B5 = 24 , sa se gaseasca B7, B9, B10;
B3 = B1*q(la puterea 2)
B5 = B1*q(la puterea 4)
=> 6/24 = q(la puterea -2) => q = 2
B3 = B1*q(la puterea 2) => B1 = 3/2
=> B7 = B1*q(la puterea 6) = 3/2*64 = 96
=> B9 = B1*q(la puterea 8) = 3/2*256 = 384
=>B10 = B1*q(la puterea 9) = 3/2*512 = 768

30(pag.74). Sa se scrie formula termenului al n-lea al progresiei geometrice date prin :

B1 = 2
Bn+1 = 3*Bn

Bn = B1*q(la puterea n-1) = 2*q(la puterea n-1)
Bn+1 = Bn*q => 3*Bn = Bn*q => q = 3

- Bn = 2/3*3(la puterea n)

Rezolvati ecuatia : $1+X+X^2+\ldots+X^{100} = 0$
$Sn = 1*(1- X^{101})/(1- X)$
X <>0 => X<>1

=> 1- X^{101} = 0 => X^{101} = 1 => X^{101} = cos0 +i*sin0
=> Xk = ^{101}✰cos0 + i*sin0 = cos2k♉/101 + i*sin2k♉/101
k=0 => X=1 (nu convine)
k=1 => X=cos2♉/101 + i*sin2♉/101
…
k=100 => X=cos200♉/101 + i*sin200♉/101

Intr-o progresie geometrica avem S3= 40, S6= 60. Sa se gaseasca S9.

S3= B1*(q^3-1)/(q-1)
S6= B1*(q -1)/(q-1)
=> S3/S6= (q^3-1)/(q -1)= 2/3
=> 3*q^3-3 = 2*q -2
=> 2*q +3*q^3-1= 0
Notam: q^3 = y
=> 2*y^2-3*y+1= 0
Δ= 1 => y1=2, y2=1
=> q^3=1 => q=1(nu convine)
=> q^3=2 => q=^{3}✰2
=> S3= B1*(q^3-1)/(q-1)= 40 => B1=40(^{3}✰2 -1)
=>S9= B1*(q -1)/(q-1) = 280

Sa se determine x astfel incat numerele a+x, b+x, c+x sa fie in progresie geometrica.

$(b+x)^2 = (a+x)*(c+x)$
$b^2 + 2bx + x^2 = ac + ax + cx + x^2$
$b^2 - ac = x(a+c-2b)$
=> $x = (b^2-ac)/(a+c-2b)$

Gasiti primul termen si ratia intr-o progresie geometrica daca:
A4 + A1=7/16
A3- A2 + A1=7/8

A1*q^3 + A1=7/16 => A1(q^3 + 1)=7/16
A1*q^2 -A1*q +A1=7/8 => A1(q^2 -q +1)=7/8
=> (q^3+1)/(q^2 -q +1)=1/2 => q+1=1/2 => q= -1/2
=> A1(-1/8 +1) =7/16 => A1= 1/2