Piramida şi conul

A.Piramida înscrisă în con

Definiţie: Fiind dat un con circular , se numeşte *piramidă înscrisă* în acest con , piramida a cărei baze este un poligon înscris în cercul de bază al conului şi al cărui vîrf coincide cu vîrful conului . (fig.1)

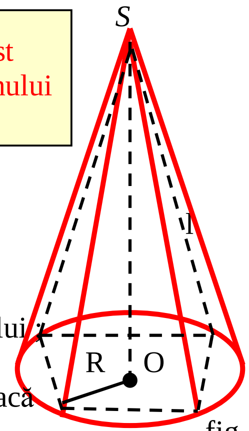


fig.1

Din definiţie rezultă:

- Înălţimea celor două corpuri sînt egale ;
- Muchiile laterale ale piramidei sunt generatoare pentru con ;
- Poligonul de bază al piramidei este înscris în cercul de bază al conului ;

În aceste condiţii putem afirma că o piramidă se poate înscrie într-un con dacă poligonul de bază este inscriptibil .

B.Piramida circumscrisă conului

Definiţie: Fiind dat un con circular , se numeşte *piramidă circumscrisă* acestui con piramida care are ca bază un poligon circumscris cercului de bază al conului şi al cărui vîrf coincide cu vîrful conului . (fig.2)

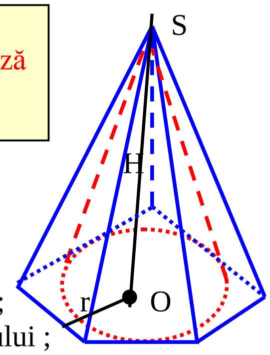


fig.2

Din definiţie rezultă:

- Înălţimea celor două corpuri sunt egale ;
- Planele ce conţin feţele laterale ale piramidei sunt tangente la suprafaţa (pînză) conică , intersecţiile planelor cu conul sunt generatoare ale conului ;
- Poligonul de bază al piramidei este circumscris cercului de bază al conului ;
- Piramida şi conul au acelaşi vîrf ;

Ca urmare , o piramidă este circumscriptibilă unui con dacă , şi numai dacă , baza piramidei este un poligon circumscriptibil .

Probleme rezolvate

Problema 1 :
Calculaţi raportul dintre volumul unei piramide cu baza hexagon regulat înscris într-un con şi volumul conului .

Soluţie : Se ştie că $l_6 = R$. Atunci , $\frac{V_{piramidă}}{V_{con}} = \frac{\frac{1}{3} l_6^2 \sin 60^0 \frac{h}{2}}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (u.c.)

Răspuns: $\frac{V_{piramidă}}{V_{con}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ *(u.c.);*

Problema 2:
Triunghiul dreptunghic cu catetele de 15 cm şi 20 cm este rotit în jurul ipotenuzei.
Determinaţi aria suprafeţei totale a corpului de rotaţie obţinut.

Solutie:

Corpul obţinut e format din două conuri avînd ca generatoare catetele triunghiului iniţial , iar înălţimi - proiecţiile catetelor pe ipotenuză . Cele două conuri obţinute au aceeaşi bază – un cerc de rază egală cu înălţimea triunghiului dreptunghic.

$$Atot. = Alat.(1con) + Alat.(2con) = \pi R g_1 + \pi R g_2 = \pi R(g_1 + g_2)$$

R=H a triunghiului ; a=20cm , b=15cm $\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 25(cm)$

$$a \cdot b = h \cdot c \Rightarrow h = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12(cm)$$

R=12(cm) $\quad g_1 = a; \quad g_2 = b$

$$Atot. = \pi R(g_1 + g_2) = \pi \cdot 12 \cdot (20 + 15) = 420\pi(cm^2)$$

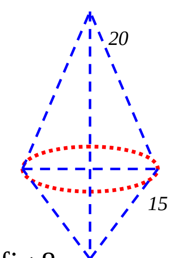
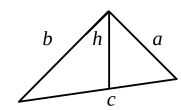


fig.8



Răspuns: $Atot. = 420\pi(cm^2)$

Problema 3 :
Într-un con echilateral ***C*** este înscrisă o piramidă patrulateră regulată ***P*** .
Care este raportul ariilor laterale ale conului şi piramidei ?

Soluţie : Conul echilateral are secţiunea axială un triunghi echilateral .
Deci VA = CV = AC = G (fig. 3). Atunci R = $\frac{G}{2}$. Deci $A_l(C)$ =

Deci $A_l(C)$ = πRG = $\pi\frac{G^2}{2}$ $A_l(P) = \frac{4(R\sqrt{2})VM}{2}$, unde *M* este mijlocul lui (AB) . Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VAM , obţinem :

$$\text{VM} = \sqrt{VA^2 - AM^2} = \sqrt{G^2 - \left(\frac{G\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{G\sqrt{14}}{4}.$$

Deci $A_l(P) = G\sqrt{2}\frac{G\sqrt{14}}{4} = \frac{G^2\sqrt{7}}{2}$ şi $\frac{A_l(C)}{A_l(P)} = \frac{\pi}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ (u.p.) .

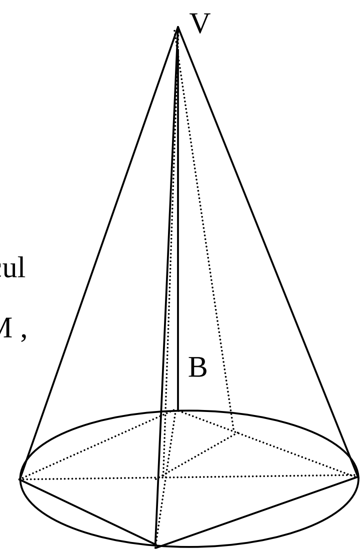


fig.3

Răspuns: $\frac{A_l(C)}{A_l(P)} = \frac{\pi}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ (u.p.);

Problema 4:

Care este raportul între volumul tetraedului regulat înscris într-un con cu raza bazei R şi piramida regulată circumscrisă aceluiaşi con?

Soluţie: Fie T tetraedrul înscris în conul $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{P}$ piramida regulată circumscrisă acestui con .

Dacă a este muchia tetraedului regulat înscris , atunci avem relaţiile: $\frac{a\sqrt{3}}{3} = R \Leftrightarrow a = \sqrt{3}R.$

Fie b latura triunghiului echilateral care este baza piramidei $\mathscr{P}$.R , raza bazei conului , este raza cercului înscris în triunghiul de bază al piramidei $\mathscr{P}$. Atunci , R= $\frac{b\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow b = 2R\sqrt{3}$. Dacă mai ţinem seama de formula ariei unui triunghi echilateral , obţinem :

$$\frac{V_T}{V_P} = \frac{\left[\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\frac{R}{4}\right)^2 h_T\right]}{\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2R\sqrt{3}}{4}\right)^2 h_P\right]} = \frac{2R^2h_c}{12R^2h_c} = \frac{1}{4}$$

Răspuns: $\frac{V_T}{V_P} = \frac{1}{4}$ *(u.c.);*

Problema 5:

Triunghiul cu laturile egale cu 15 cm,41 cm şi 52cm este rotit în jurul dreptei ce conţine latura mai mare.Determinaţi înălţimea conurilor din care este format corpul de rotaţie şi volumul corpului de rotaţie.

Solutie:

a=15cm
b=41cm
c=52cm

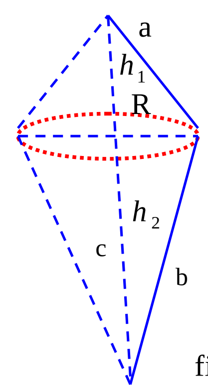


fig.9

La rotaţia triunghiului în jurul laturii c se formează două conuri cu aceeaşi bază şi înălţimile – proiecţiile laturilor a şi b pe latura c , iar generatoarele acestor conuri fiind însăşi laturile a şi b.
Raza bazei conurilor formate , este înălţimea triunghiului iniţial .

R=H a triunghiului = $\frac{2 \cdot Striunghiului}{c}$ p= $\frac{P}{2} = \frac{15+41+52}{2} = 54$

Str.= $\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)(p-c)} = \sqrt{54\cdot(54-15)(54-41)(54-52)} = \sqrt{54\cdot 39\cdot 13\cdot 2} = 234(cm^2)$

$$R = \frac{2\cdot 234}{52} = 9(cm)$$

$$h_1 = \sqrt{a^2 - R^2} = \sqrt{6\cdot 24} = 12(cm)$$
$$h_2 = \sqrt{b^2 - R^2} = \sqrt{32\cdot 50} = 40(cm)$$

$$V_{copr.}=V_{1con}+V_{2con}=\frac{1}{3}A_{baz.}\cdot h_1+\frac{1}{3}A_{baz.}\cdot h_2=\frac{1}{3}A_{baz.}(h_1+h_2)=\frac{1}{3}\pi R^2(h_1+h_2)=1404\pi(cm^3)$$

Răspuns: $V_{copr.}=1404\pi(cm^3)$.

Problema 6:

Într-o piramidă regulată muchia laterală este egală cu b şi formează cu planul bazei un unghi λ.Să se afle aria suprafeţei totale a conului circumscris piramidei.

Solutie: Muchia laterală a piramidei este generatoarea conului circumscris piramidei , iar unghiul dintre muchia laterală şi planul bazei piramidei coincide cu unghiul dintre generatoare şi raza bazei conului.

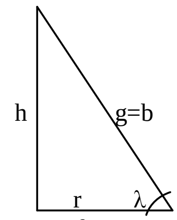


fig.10

$Atot.=Alat.+Abaz.=\pi rg+\pi r^2=\pi r(g+r)$

g=b

$r=b\cdot\cos\lambda$ (cateta alăturată unghiului λ)

$Atot.=\pi\cdot r(g+r)=\pi\cdot b\cdot\cos\lambda(b+\cos\lambda)=\pi b^2\cos\lambda(1+\cos\lambda)$ *(u.p.)*

Răspuns: $Atot.=\pi b^2\cos\lambda(1+\cos\lambda)$ *(u.p.)*

Problema 7 :

Toate muchiile laterale ale unei piramide sînt egale. Demonstraţi că această piramidă este înscrisă într-un con .

Soluţie : Din vîrful piramidei coborîm perpendiculara SO pe planul bazei (fig.1) şi notăm prin ℓ lungimea muchiilor laterale ale piramidei . Vîrfurile bazei sînt depărtate de la vîrful O la una şi aceeaşi distanţă .

R=$\sqrt{l^2-OS^2}$.

De aici rezultă că piramida noastră este înscrisă într-un con , vîrful căruia este vîrful piramidei , iar baza este un cerc cu centru în punctul O şi raza R .

Problema 8:

Într-un con este înscrisă o piramidă triunghiulară regulată cu înălţimea H şi muchia laterală a piramidei formează cu planul bazei unghiul egal cu λ . Determinaţi generatoarea , raza bazei conului şi suprafaţa totală a conului.

Solutie:

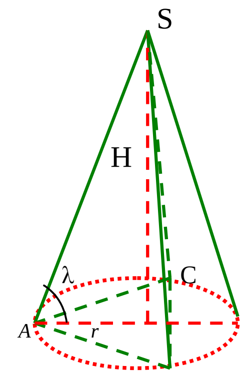


fig.6

Unghiul (λ) dintre muchia laterală a piramidei şi planul bazei sale este unghiul dintre generatoarea conului şi raza bazei lui.

$g=\dfrac{H}{\sin\lambda}$ (ipotenuza prin cateta opusă unghiului λ)

r = $H\cdot ctg\lambda$ (cateta alăturată unghiului λ)

$$Atot. = Alat. + Abaz. = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r) = \pi \cdot H \cdot ctg\lambda\left(\frac{H}{\sin\lambda} + H \cdot ctg\lambda\right) =$$

$$= \pi H^2 \cdot \frac{ctg\lambda}{\sin\lambda}(1 + \cos\lambda).$$

Răspuns: $g = \frac{H}{\sin\lambda}$ *(u.p.)*; r = $H \cdot ctg\lambda$ *(u.p.)* ;

$Atot. = \pi H^2 \cdot \frac{ctg\lambda}{\sin\lambda}(1 + \cos\lambda).$*(u.p.)*

Problema 9:

Într-un con este înscrisă o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei este egală cu a .Unghiul format de faţa laterală a piramidei şi planul bazei este egal cu λ . Determinaţi raza bazei , înălţimea , generatoarea şi aria suprafeţei laterale a conului.

Solutie: Unghiul (λ) format de faţa laterală a piramidei şi planul bazei ei este unghiul dintre înălţimea feţei laterale şi înălţimea bazei piramidei.

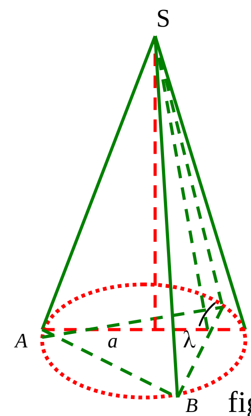


fig.7

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (raza cercului circumscris unui triunghi echilateral)

$H = r \cdot tg\lambda = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot tg\lambda$ (r=raza cercului înscris într-un triunghi echilateral)

(cateta apusă unghiului (λ)-prin cateta alăturată)

$$g = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} tg^2\lambda + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{tg^2\lambda + 4}{12}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{tg^2\lambda + 4}{3}}$$

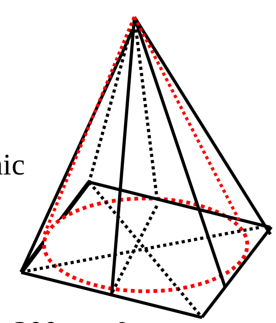
$$Alat. = \pi R g = \pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\frac{tg^2\lambda + 4}{3}} = \pi \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{tg^2 + 4}{3}} = \frac{\pi}{6} a^2 \sqrt{tg^2\lambda + 4}$$

Răspuns: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ *(u.p.)*; $H = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot tg\lambda$ *(u.p.)*;

$g = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{tg^2\lambda + 4}{3}}$ *(u.p.)*; $Alat. = \frac{\pi}{6} a^2 \sqrt{tg^2\lambda + 4}$ *(u.p.)* .

Problema 10:

Conul cu înălţimea $10\sqrt{3}$ cm şi raza de 10 cm este înscris într-o piramidă , baza căreia este un romb cu unghiul ascuţit de 30^0 . Determinaţi unghiul format de generatoare şi planul bazei , aria suprafeţei totale a conului , volumul conului şi al piramidei.



Soluţie: Fie MN-generatoarea , α=m(MNO) , triunghiul MNO este dreptunghic în punctul O . tgα = $\frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$ de aici rezultă ca α = 60º.

Aria totală a conului este egală cu : St =πR(R+G) , G= $\sqrt{H^2 - r^2}$,
de aici rezultă că G = 20 cm , înlocuind datele din problemă obţinem ca St =300π cm².

Volumul conului este egal cu: Vcon= $\frac{1}{3}$ πR²H , înlocuind datele din problemă obţinem că

fig.4

Vcon= $\frac{1000\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³.

Volumul piramidei este egal cu: Vpir= $\frac{1}{3}$ Sbaz H, înlocuind şi făcînd calculele , obţinem că Vpir = $\frac{8000\sqrt{3}}{3}$ cm³ .

Răspuns: α=60°;
Stot= 300π cm²;
Vcon= $\frac{1000\sqrt{3}\pi}{3}$ *cm³;*
Vpir= $\frac{8000\sqrt{3}}{3}$ *cm³.*

Probleme propuse

Problema 1 :
Dintr-o piesă de oţel avînd forma unei piramide regulate cu baza un pătrat de latura 10 cm şi înălţimea 12 cm , se strunjeşte o piesă conică cu minimum de material pierdut . Să se afle aria laterală şi volumul piesei obţinute .

Răspuns : $65\pi\ cm^2$, $100\pi\ \ cm^3$;

Problema 2:
O piramidă pentagonală este circumscrisă unui con circular drept de înălţime egală cu raza bazei conului .Aria totală a piramidei este dublu ariei conului .Determinaţi volumul piramidei dacă aria laterală a conului este egală cu $\pi\sqrt{2}$.

Răspuns: $Vpir. = \frac{2\pi}{3}$ *(u.c.);*

Problema 3:
Într-un con este aşezată o piramidă astfel încît baza piramidei este înscrisă în baza conului , iar vîrful piramidei se află pe o generatoare a conului .Toate feţele laterale ale piramidei sunt la fel înclinate faţă de planul bazei .Baza piramidei este un triunghi isoscel cu unghiul de la vîrf egal cu λ .Să de determine raportul dintre volumul conului şi volumul piramidei.

Răspuns: $\frac{Vcon.}{Vpir.} = \frac{\pi}{4\cos^2\frac{\lambda}{2}\sin\lambda\left(1-\sin\frac{\lambda}{2}\right)}$ *(u.c.);*

Problema 4:
Într-o piramidă patrulateră regulată este înscris un con.Să se afle aria suprafeţei lui totale ,dacă latura bazei piramidei este egală cu a , iar unghiul diedru de la acestă bază cu λ .

Răspuns: $Stot. = \frac{\pi a^2\cos^2\frac{\lambda}{2}}{2\cos\lambda}$ *(u.p.);*

Problema 5:
Aria laterală a unei piramide triunghiulară regulate cu latura bazei egală cu a , este de cinci ori aria bazei .Determinaţi volumul conului înscris în piramidă.

Răspuns: $Vcon. = \frac{\sqrt{2}}{36}\pi a^3$ *(u.c.);*

Problema 6:
Aceeasi ,dacă piramida este triunghiulară.

Răspuns: $Stot. = \frac{\pi a^2\cos^2\frac{\lambda}{2}}{6\cos\lambda}$ *(u.p.);*

Problema 7 :
Să se calculeze volumul conului înscris într-un tetraedru regulat de muchia ***a*** .

Tetraedru fiind $[VABC]$, conul are ca bază discul înscris în triunghiul ABC şi acelaşi vîrf V.

Răspuns : $Vcon. = \frac{a^3\sqrt{6}}{108}\pi$ *(u.c.);*

Problema 8:
Să se determine volumul unui con înscris într-o piramidă triunghiulară regulată de muchie laterală l şi unghiul plan de la vîrful piramidei egal cu λ.

Răspuns: $V_{co.} = \frac{1}{9}\pi l^3 \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{\frac{1+2\cos\lambda}{3}}$ *(u.c.);*

Problema 9:
Într-o piramidă regulată muchia laterală este egală cu b şi formează cu planul bazei un unghi λ.Să se afle aria suprafeţei totale a conului circumscris piramidei.

Răspuns: $S_{tot.} = 2\pi b^2 \cos^2\frac{\lambda}{2}\cos\lambda$ *(u.p.);*

Problema 10:
Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic şi feţele laterale care conţin catetele formează unghiul de 30^0 şi 60^0 cu planul bazei.Un con circular drept este circumscris piramidei .Să se calculeze volumul conului dacă înălţimea piramidei este h.

Răspuns: $V_{con.} = \frac{10\pi h^3}{9}$ *(u.c.);*

Bibliografie:

www.google.com