Functia logaritmica

Barbir Iosif, clasa a X-a C
Referat Matematica
Indrumator, prof. Oanea Calin

Logaritmi

1.Definiţia logaritmului unui număr pozitiv

Fie a>0 un număr real pozitiv,a$\neq 1$.Considerăm ecuaţia exponenţială

$$a^x=N, N>0 \qquad (1)$$

Ecuaţia (1) are o soluţie care este unic determinată.Această soluţie se notează

$$X=\log_a N \qquad (2)$$

şi se numeşte logaritmul numărului pozitiv baza a.

Din (1) şi (2) obţinem egalitatea

$$a^{\log_a N}=N \qquad (3)$$

care ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a (a>0,a$\neq 1$)pentru a obţine numărul dat

Dacă in (1) facem x=1,obţinem $a^1=a$ şi deci

$$\log_a a=1 \qquad (4)$$

Exemple

1) Să se calculeze $\log_2 32$.

Cum $2^5=32$,atunci din definiţia logaritmului avem $\log_2 32=5$.

2) Să se determine $\log_2 \frac{1}{16}$.

Din egalitatea $2^{-4}=\frac{1}{16}$,obţinem $\log_2 \frac{1}{16}=-4$.

3)Să să determine $\log_{1/3} 27$.

Să considerăm ecuaţia exponenţială $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$.Cum $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{3}_{-3}=27$,obţinem x=-3

şi deci $\log_{1/3} 27=-3$.

4)Să se determine $\log_4 256$.

Cum $4^4=256$,atunci din definiţia logaritmului obţinem $\log_4 256=4$.

Observaţii

1.În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc şi logaritmi zecimali.Aceştia se notează cu lg în loc de $\log_{10}$;de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza.Astfel,vom scrie lg106 în loc de $\log_{10}106$ şi lg5 în loc de $\log_{10}5$ etc.

2.În matematica superioară apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul iraţional,notat cu e,e=2,718281828… .Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice.Logaritmii în baza e apar în rezolvarea unor probleme de fizică şi intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice,biologice.De aceea aceşti logaritmi se numesc naturali.Logaritmul natural al numărului a se notează lna.

2.Funcţia logaritmică

Fie $a>0, a\neq 1$ un număr real.La punctul 1 am definit noţiunea de logaritm în baza a;
fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat.Acest lucru ne permite să definim o funcţie

$f:(0,+\infty)\rightarrow \Re, f(x)=\log_a x$ numită funcţie logaritmică.

Proprietăţile funcţiei logaritmice:

1.f(1)=0.
Cum $a^0=1$ rezultă că $\log_a 1=0$ şi deci f(1)=0.
2.Funcţia logaritmică este monotonă.Dacă a>1,atunci funcţia logaritmică este strict crescătoare,iar dacă 0<a<1,funcţia logaritmică este strict descrescătoare.
Să considerăm cazul a>1 şi fie $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ astfel încât $x_1<x_2$.Cum $x_1=a^{\log_a x_1}$ şi
$X_2=a^{\log_a x_2}$,rezultă că $a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2}$.
Dar funcţia exponenţială fiind crescătoare obţinem că $\log_a x_1<\log_a x_2$,adică $f(x_1)<f(x_2)$.
În cazul 0<a<1,din inegalitatea $a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2}$ şi din faptul că funcţia exponenţială cu
baza un număr real 0<a<1 este strict descrescătoare,rezultă că $\log_a x_1>\log_a x_2$,adică
$f(x_1)>f(x_2)$.
3.Funcţia logaritmică este bijectivă
Dacă $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ astfel încât $f(x_1)=f(x_2)$,atunci din $\log_a x_1=\log_a x_2$.Dar din egalitatea (3) de la punctul 1 obţinem $x_1=a^{\log_a x_1}$ şi $x_2=a^{\log_a x_2}$,adică $x_1=x_2$.Deci f este o funcţie in-
jectivă.
Fie $y\in\Re$ un număr real oarecare.Notăm cu $x=a^y$.Se vede că $x\in(0,+\infty)$ şi $\log_a x=\log_a a^y=y$
Deci f(x)=y,ceea ce ne arată că f este şi surjectivă.Aşadar,f este bijectivă.
4.Inversa funcţiei logaritmice este funcţia exponenţială
Funcţia logaritmică $f:(0,+\infty)\rightarrow\Re, f(x)=\log_a x$,fiind bijectivă,este inversabilă.Inversa ei
este funcţia exponenţială $g\Re\rightarrow(0,+\infty)$,$g(x)=a^x$.
Într-adevăr,dacă $x\in(0,+\infty)$ avem $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\log_a x)=a^{\log_a x}=x$ şi dacă $y\in\Re$,atunci
atunci $(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(a^y)=\log_a a^y=y$.

3)Proprietăţile logaritmilor
Folosind proprietăţile puterilor cu exponenţi reali obţinem următoarele proprietăţi
pentru logaritmi:
a.Dacă A şi B sunt două numere pozitive,atunci

$\log_a(AB)=\log_a A+\log_a B$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).
Într-adevăr,dacă $\log_a A=x$ şi $\log_a B=y$,atunci $a^x=A$ şi $a^y=B$.Cum $a^{x+y}=a^x * a^y$,obţinem
$A^{x+y}=A*B$ şi deci $\log_a(AB)=x+y=\log_a A+\log_a B$.
Observaţie.
Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive $A_1,A_2,...,A_n$ adică
$\text{Log}_a(A_1A_2...A_n)=\log_a A_1+\log_a A_1+\log_a A_2+...+\log_a A_n$.
b.Dacă A şi B sunt două numere pozitive,atunci

$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$

(logaritmul câtului a două numere este egal cu diferenţa dintre logaritmul numără-
torului şi cel al numitorului).

Într-adevăr,ţinând cont de proprietatea a.,avem $\log_a A=\log_a\left(\frac{A}{B}*B\right)=\log_a\frac{A}{B}+\log_a B$,

de unde rezultă că $\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$.

Observaţie.

Dacă punem A=1 şi ţinem cont că $\log_a 1=0$,obţinem egalitatea:

$$\log_a\frac{1}{B}=-\log_a B$$

c.Dacă A este un număr pozitiv şi m un număr real arbitrar,atunci

$$\log_a A^m=m\log_a A$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi loga-
ritmul numărului).

Într-adevăr,dacă $\log_a A=x$,atunci $a^x=A$.Dar atunci $A^m=(a^x)^m=a^{mx}$ şi deci $\log_a A^m=mx=$
$=m\log_a A$.

d.Dacă A este un număr pozitiv şi n un număr natural($n\geq 2$),atunci

$$\log_a\sqrt[n]{A}=\log_a A/n$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului).

Într-adevar, proprieatea d este un caz particular al proprietăţii c,punând $m=\frac{1}{n}$.

Exemple

1)Să se calculeze $\log_3 75$.

$\text{Log}_3 75=\text{Log}_3(3*25)=\text{Log}_3 3+\text{Log}_3 25=1+\text{Log}_3 5^2=1+2\text{Log}_3 5$.

2)Să se determine $\log_2 1000-\log_2 125$

Avem $\log_2 100-\log_2 125=\log_2\frac{1000}{125}=\log_2 8=\log_2 2^3=3$.

3)Să se calculeze lg0,18-lg180.

Avem $\lg 0{,}18-\lg 180=\lg\frac{0{,}18}{180}=\lg\frac{1}{1000}=\lg 10^{-3}=-3$.

4)Să se calculeze $\log_6\frac{1}{18}+\log_6\frac{1}{12}$.

Avem $\log_6\frac{1}{18}+\log_6\frac{1}{12}=-\log_6 18-\log_6 12=-(\log_6 18+\log_6 12)=-\log_6(18*12)=-\log_6 6^3=-3$.

5)Să se calculeze $\log_2\sqrt[5]{81}$.Avem $\log_2\sqrt[5]{81}=\frac{1}{5}\log_2 81=\frac{1}{5}\log_2 3^4=\frac{4}{5}\log_2 3$.

6)Să se calculeze $\log_2\sqrt[4]{8}$.Avem $\log_2\sqrt[4]{8}=\frac{1}{4}\log_2 8=\frac{1}{4}\log_2 2^3=\frac{3}{4}\log_2 2=\frac{3}{4}$.

4.Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr

Dacă a şi b sunt două numere pozitive diferite de 1,iar A un număr pozitiv oarecare,are loc egalitatea:

$\log_a A=\log_b A*\log_a b$

Într-adevăr,dacă $\log_a A=x$ şi $\log_b A=y$,atunci avem $a^x=A$ şi $b^y=A$,de unde obţinem $a^x=b^y$.Dar atunci $\log_a a^x=\log_a b^y$ sau $x\log_a a=y\log_a b$.

Cum $\log_a a=1$,avem $x=y\log_a b$,adică $\log_a A=\log_b A*\log_a b$.

Observaţie.

Dacă în egalitatea de mai sus A=a,obţinem $\log_a a=\log_b a*\log_a b$.Cum $\log_a a=1$,rezultă că:

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

Exemple

1)Să se scrie $\log_2 x$ în funcţie de $\log_4 x$.

Avem $\log_2 x=\log_4 x*\log_2 4=2\log_4 x$.

2)Să se arate că $\log_2 6+\log_6 2>2$.

Avem $\log_2 6+\log_6 2=\log_2 6+\dfrac{1}{\log_2 6}$.

Deci trebuie să arătăm că $\log_2 6+\dfrac{1}{\log_2 6}>2$ sau $(\log_2 6)^2-2\log_2 6+1>0$,sau încă $(\log_2 6-1)^2>0$ inegalitate evidentă deoarece $\log_2 6\neq 1$.

5)Operaţia de logaritmare a unei expresii

Să considerăm expresia:

$$E=\frac{17^3\sqrt[4]{131}*\sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37*98*23}}$$

Vom logaritma expresia într-o anumită bază convenabilă a.Folosind proprietăţile logaritmilor,obţinem:

$\log_a E=\log_a(17^3\sqrt[4]{131}\sqrt[3]{92})-\log_a\sqrt[5]{37*98*23}=\log_a 17^3+\log_a\sqrt[4]{131}+\log_a\sqrt[3]{92}-\dfrac{\log_a(37*98*23)}{5}=$

$=3\log_a 17+\dfrac{1}{4}\log_a 131+\dfrac{1}{3}\log_a 92-\dfrac{1}{5}\log_a 37-\dfrac{1}{5}\log_a 98-\dfrac{1}{5}\log_a 23$.

Deci am obţinut egalitatea:

$\log_a E=3\log_a 17+\dfrac{1}{4}\log_a 131+\dfrac{1}{3}\log_a 92-\dfrac{1}{5}\log_a 37-\dfrac{1}{5}\log_a 98-\dfrac{1}{5}\log_a 23$.

În general,dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri şi radicali, putem să-I asociem,exact ca în exemplu de mai sus,o expresie,notată log E,in care apar sume (diferenţe) de logaritmi înmulţite eventual cu anumite numere raţionale.Operaţia prin care expresiei E i se asociază expresia log E se numeşte"operaţie de logaritmare".

Exemple

1) Fie $E=a^2\sqrt[7]{ab^6}$.Prin operaţia de logaritmare,obţinem:

$loc_cE=log_c(a^2\sqrt[7]{ab^6})=log_ca^2+log_c\sqrt[7]{ab^6}=2log_ca+\frac{1}{7}log_ca+\frac{6}{7}log_cb$.

2)Fie $E=\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$.Prin operaţia de logaritmare,obţinem:

$log_cE=log_c\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}=\frac{1}{4}log_c\frac{a^3}{b^5}=\frac{1}{4}(log_ca^3-log_cb^5)=\frac{3}{4}log_ca-\frac{5}{4}log_cb$.

Adesea în calcule este nevoie să se facă şi operaţia inversă,adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu,să considerăm expresia $log_cE=2log_ca-\frac{1}{2}log_cb-3log_c3$.

Folosind proprietăţiile logaritmilor,avem:

$Log_cE=log_ca^2-log_c\sqrt{b}-log_c3^3=log_c\frac{a^2}{\sqrt{b*3^3}}=log_c\frac{a^2}{27\sqrt{b}}$,de unde obţinem că

$E=\frac{a^2}{27\sqrt{b}}$.

Ecuaţii şi inecuaţii logaritmice

1)Ecuaţiile logaritmice sunt ecuaţii în care expresiile ce conţin necunoscute apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De exemplu:$log_{x+1}(x+2)=1$;$lg(x^2+x-2)=3$;$log_x(5x^2+3)=lg(2x+3)-1$.

Folosind injectivitatea funcţiei exponenţiale,avem că rezolvarea unei ecuaţii de tipul $log_{g(x)}f(x)=b$ este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei $f(x)=g(x)^b$.Vom avea însă grijă ca soluţiile obţinute să satisfacă $f(x)>0,g(x)>0,g(x)\neq 1$, pentru care expresia $log_{g(x)}f(x)$ are sens.

La fel ca la ecuaţiile exponenţiale,în practică atunci când avem de rezolvat o ecuaţie logaritmică,vom proceda astfel:folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile logaritmice,vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple,de regulă de gradul întâi sau de gradul al doilea.

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia:$log_x(x^2-3x+9)=2$.

Obţinem $x^2-3x+9=x^2$ şi deci $3x=9,x=3$.Deoarece pentru $x=3>0$,expresia x^2-3x+9 este pozitivă,rezultă că x=3 este soluţie a ecuaţiei.

Rezolvarea altor ecuaţii se bazează pe injectivitatea funcţiei logaritmice,şi anume din $log_af(x)=log_ag(x)$,deducem $f(x)=g(x)$,impunând condiţiile:$f(x)>0,g(x)>0$

Exemple

1) Să se rezolve ecuaţia:$lg(x^2-15)=lg(x-3)$.Deducem că $x^2-15x=x-3$,deci $x^2-x-12=0$

adică $x_1=4$,$x_2=-3$.Deoarece pentru $x_2=-3$ obţinem $x-3=-3-3=-6<0$,rezultă că $x_2=-3$ nu este soluţie a ecuaţiei.Deci numai 4 este soluţie.

2)Să se resolve ecuaţia:$2\lg(x-1)=\frac{1}{2}\lg x^5-\lg\sqrt{x}$.În această ecuaţie punem de la început condiţiile $x-1>0$,$x>0$,pentru a avea sens expresiile $\lg(x-1)$,$\lg x^5$,$\sqrt{x}$, $\lg\sqrt{x}$.

Ecuţia se mai scrie $2\lg(x-1)=\frac{5}{2}\lg x-\frac{1}{2}\lg x$ şi deci $2\lg(x-1)=2\lg x$.Prin urmare,$\lg(x-1)=\lg x$,de unde obţinem $x-1=x$,$-1=0$,contradicţie;rezultă deci că ecuaţia dată nu are soluţii.

3) Să se rezolve ecuaţia:$\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2$.Punem condiţiile de existenţă a logaritmilor:$x+7>0$,$3x+1>0$,deci $x>-\frac{1}{3}$.Obţinem $\lg(x+7)(3x+1)=2$ şi deci $(x+7)(3x+1)=10^2=100$.Rezultă ecuaţia de gradul al doilea $3x^2+22x-93=0$,de unde rezultă $x_1=3$,$x_2=-\frac{31}{3}$.Deoarece $-\frac{31}{3}<-\frac{1}{3}$,obţinem că 3 este singura soluţie a ecuaţiei date.

Observaţie

Ecuaţia precedentă nu este echivalentă cu ecuaţia $\lg(x+7)(3x+1)=2$,care are două soluţii $x_1=3$,$x_2=-\frac{31}{3}$,deoarece pentru amândouă aceste valori ale lui x,$\lg(x+7)(3x+1)$ are sens.

4) Să se rezolve ecuaţia:$\log^2_3 x-3\log_3 x-4=0$.Avem condiţia $x>0$ şi făcând substituţia $\log_3 x=y$,obţinem $y^2-3y-4=0$.Deci $y_1=4$,$y_2=-1$.Din $\log_3 x=4$.obţinem $x=3^4$,$x=81$,iar din $\log_3 x=-1$,obţinem $x=3^{-1}$,$x=\frac{1}{3}$.

În continuare vom rezolva câteva ecuaţii care nu se pot încadra într-un anumit tip.Astfel,pot apărea ecuaţii cu logaritmi scrişi în diferite baze,ecuaţii în care apar expresii conţinând necunoscute şi la exponenţi şi la logaritmi etc.

5)Să se rezolve ecuaţia:$\log_2 x+\log_3 x=1$.Deducem,aplicând formula de schimbare a bazei,$\frac{\lg x}{\lg 2}+\frac{\lg x}{\lg 3}=1$ sau $\lg x=\frac{\lg 2\lg 3}{\lg 2+\lg 3}=\frac{\lg 2\lg 3}{\lg 6}$. Deci $x=10^{\frac{\lg 2\lg 3}{\lg 6}}$.

6)Să se rezolve ecuaţia:$\log_3 x+\log_x 3=2$.Deoarece $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$,rezultă $\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=2$.Notând $\log_3 x=y$,obţinem $y+\frac{1}{y}=2$,adică $y^2-2y+1=0$;deci $y=1$,adică $\log_3 x=1$.Prin urmare,$x=3$.

7)Să se rezolve ecuaţia:$x^{\lg x+2}=1000$.Punem condiţia de existenţă a expresiilor:$x>0$.Logaritmând,obţinem o ecuaţie echivalentă $\lg(x^{\lg x+2})=\lg 1000$ care devine $(\lg x+2)\lg x=3$.Notând $\lg x=y$,avem $y^2+2y-3=0$ şi deci $y_1=-3$,$y_2=1$.Din $\lg x=-3$,
obţinem $x=10^{-3}$,$x=0{,}001$,iar din $\lg x=1$,rezultă $x=10$.

2)Sisteme de ecuaţii logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior la ecuaţiile de tipul respectiv.

Exemplu

Să se rezolve sistemul $x^2+y^2=425$
$\lg x + \lg y = 2$

Obţinem,pe rând sistemele $x^2+y^2=425$ $\quad$ $x^2+y^2=425$
$\lg xy = 2 \quad \Leftrightarrow \quad xy=1000$
$x,y>0 \quad\quad x,y>0$

Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a:punem s=x+y,p=xy şi vom avea $s^2-2p=425$ $\quad s^2=625$ $\quad s=\pm 25$
$P=100 \quad \Leftrightarrow p=100 \quad \Leftrightarrow p=100$

Sistemul s=25
P=100 dă soluţiile (5,20),(20,5) care satisfac şi condiţiile de existenţă ale sistemului iniţial,x>,y>0.Sistemul s=-25
P=100 dă soluţiile (-20,-5),(-5,-20),care nu convin.

3)Inecuaţii logaritmice

Rezolvarea inecuaţiilor logaritmice se bazează pe proprietăţile de monotonie ale funcţiei logaritmice.Am văzut că funcţia logaritmică este crescătoare dacă baza este supraunitară şi descrescătoare dacă baza este subunitară.

Exemple

1)Să se rezolve inecuaţia:$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>-3$.Avem că $-3=\log_{\frac{1}{3}}27$ şi inecuaţia devine $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)>\log_{\frac{1}{3}}27$.Deoarece baza $\frac{1}{3}$ a logaritmului este subunitară (funcţia $g:(0,\infty)\to\Re, g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$ este descrescătoare),inecuaţia devine 2x-1<27,adică x<14.În acelaşi timp,din condiţia de existenţă a logaritmului iniţial,avem 2x-1>0,deci $x>\frac{1}{2}$.Deci obţinem pentru x valorile posibile $x\in\left(\frac{1}{2},14\right)$.

4) Sisteme de inecuaţii logaritmice

În astfel de sisteme se aplică proprietăţile şi metodele arătate anterior la inecuaţiile Logaritmice.Rezolvarea acestora se reduce în definitiv la rezolvarea sistemelor de inecuaţii întâlnite în clasa a IX-a.

Exemplu

Să se rezolve sistemul

$2^{x^2-2x-3} > 2^{x+1}$
$\log_3(x^2-3x+9) < 3$.   Observăm,mai întâi,că $x^2-3x+9>0$ oricare ar fi x real($\Delta = -27 < 0$)
$|x-2|>3$ deci logaritmul este definit pentru orice x real.

Deoarece $3=\log_3 27$ şi,ţinând seama de monotonia funcţiilor exponenţială şi logaritmică,rezultă sistemul echivalent

$$\begin{cases} X^2-2x-3>x+1 \\ X^2-3x+9<27 \\ |x-2|>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4>0 \\ x^2-3x-18<0 \\ |x-2|>3 \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2-3x-4>0$ este $M_1=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2-3x-18<0$ este $M_2=(-3,6)$,iar mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x-2|>3$ este $M_3=(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$. Atunci mulţimea soluţiilor sistemului este $M=M_1\cap M_2 \cap M_3 = (-3,-2)\cup(5,6)$.

Aplicaţii

I.Admiterea în învăţământul superior

1.Să se calculeze expresia:

$$E=\log_2 25-\log_2\left(\frac{20}{3}\right)+\log_2\left(\frac{4}{21}\right)$$

Informatică,Baia Mare,1997

$E=\log_2\frac{35}{20}*\frac{4}{21} \Rightarrow E=\log_2 35*\frac{3}{20}*\frac{4}{21}=\log_2\frac{420}{420}=\log_2 1=0$
$\Rightarrow E=0$.

2.Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} xy=40 \\ x^{\lg y}=4 \end{cases}$$

Colegiu de Informatică,Cluj,1997

$xy=40 \Rightarrow y=\frac{40}{x}$
$x^{\lg y}=4$

$\lg x^{\lg y}=\lg 4$

lgy*lgx=lg4

lg$\frac{40}{x}$*lgx=lg4

(lg40-lgx)lgx=lg4

lgx*lg40-lg^{2}x=lg4

lg^{2}x-lgxlg40+lg4=0

Notăm lgx=y

$\Rightarrow$y^2-ylg40+lg4=0

$\Delta=$lg^{2}40-4lg4=(lg4+lg10)^2-4lg4=lg^{2}4+2lg4+1-4lg4=lg^{2}4-2lg4+1=(lg4-1)^2

$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{\lg 40\pm(\lg 4-1)}{2}$

$$\Rightarrow y_1=\frac{\lg 40+\lg 4-1}{2}=\frac{2\lg 4}{2}=\lg 4\Rightarrow \lg x=\lg 4\Rightarrow x=4; y=10$$

$$\Rightarrow y_2=\frac{\lg 40-\lg 4+1}{2}=1\Rightarrow \lg x=1\Rightarrow x=40; y=4$$

3.Ştiind că $\log_{40}100=a$,să se exprime $\log_{16}25$ în funcţie de a.

Chimie,Metalurgie,1981

$$\text{Log}_4 100=a\Rightarrow\frac{\lg 100}{\lg 40}=a\Rightarrow a=\frac{2}{1+2\log_{10}2}=\frac{2}{1+2\lg 2}\Rightarrow \lg 2=\frac{2-a}{2a}$$

$$\Rightarrow \log_{16}25=\frac{\lg 25}{\lg 16}=\frac{\lg 5^2}{\lg 2^4}=\frac{2\lg 5}{4\lg 2}=\frac{\lg 5}{2\lg 2}=\frac{\lg\frac{10}{2}}{2\lg 2}\Rightarrow \log_{16}25=\frac{1-\lg 2}{2\lg 2}=\frac{1-\frac{2-a}{2a}}{2*\frac{2-a}{2a}}=\frac{3a-2}{4-2a}$$

4.Ştiind că a=lg2 şi b=lg3 să se calculeze x=$3^{\log_{27}(\lg 150)^3}$

Matematică-Fizică,Sibiu,1998

X=$3^{\log_{27}(\lg 150)^3}$

$$\Leftrightarrow x=3^{3\log_{27}(\lg 150)}=27^{\log_{27}(\log 150)}=\lg 150=\lg 50+\lg 30=\lg\frac{100}{2}+\lg 3=\lg 100-\lg 2+b=\log_{10}100-\lg 2+b=$$
$$=2-a+b$$

5.Să se arate că expresia: E=$\frac{\log_2 x+\log_2\sqrt{y}+\log_2\sqrt[3]{z}}{\log_3 x+\log_3\sqrt{y}+\log_3\sqrt[3]{z}}$ este independentă de valorile strict mai mari ca 1 ale variabilelor x,z,y.

Inginerie,Constanţa,1996

$$E=\frac{\log_2(x\sqrt{y\sqrt[3]{z}})}{\log_3(x\sqrt{y\sqrt[3]{z}})}$$

Notăm $x\sqrt{y\sqrt[3]{z}}=t \Rightarrow E=\frac{\log_2 t}{\log_3 t}=\frac{\log_2 t}{\frac{\log_2 t}{\log_2 3}}=\log_2 t*\frac{\log_2 3}{\log_2 t}=\log_2 3 \Rightarrow E=\log_2 3$

II.Concursurile şcolare

1.Gorj2001-faza locală

Să se arate că dacă x,,y,z$\in (0,1)$ are loc inegalitatea:

Log$_x$yz+log$_y$xz+log$_z$xy≥ 6;

Log$_x$yz+log$_y$xz+log$_z$xy=(log$_x$y+log$_y$x)+(log$_x$z+log$_z$x)+(log$_y$z+log$_z$y)≥ 6

Dacă x,y$\in (0,1) \Rightarrow \log_x y>0$

Log$_x$yz+log$_y$xz+log$_z$xy≥ 6 are loc doar când x=y=z.

2.Bacău2001-faza locală

Să se calculeze:

$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$=E

Notăm a=log$_2$12

Log$_2$24=log$_2$12*2=log$_2$12+log$_2$2=a+1

Log$_{96}$2=$\frac{1}{\log_2 96}=\frac{1}{\log_2 12*8}=\frac{1}{\log_2 12+\log_2 8}=\frac{1}{a+3}$

Log$_2$192=log$_2$12*16=log$_2$12+log$_2$16=a+4

Log$_{12}$2=$\frac{1}{\log_2 12}=\frac{1}{a}$

(a+1)(a+3)-a(a+4)=3$\Rightarrow 3=3(A)$

3.Cluj2001-faza locală

Să se rezolve ecuaţia:

$\left[\frac{2*\log_2 x}{\log^2{}_2 x+1}\right]=\cos \pi x$, unde $[\alpha]$ este partea întreagă a numărului $\alpha\in\Re$. .

Cos $\pi x = \{-1,0,1\} \in$ Z

I. $\left[\frac{2 * \log_2 x}{\log^2{}_2 x + 1}\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x}{\log^2{}_2 x + 1} \in [-1,0) \Leftrightarrow \log_2 x < 0 \Rightarrow x \in (0,1)$

$S_1 = (0,1) \cap \{2k+1 / k \in Z\} = \varnothing$

II. $\left[\frac{2\log_2 x}{\log^2{}_2 x + 1}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x}{\log_2{}^2 x + 1} \in [0,1) \Leftrightarrow \log_2 x \geq 0; \log_2 x \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [1,+\infty) \setminus \{2\} \cap \{2k+1 / k \in Z\} = \{2k+1, k \in N^*\} = S_2$

III. $\left[\frac{2\log_2 x}{\log^2{}_2 x + 1}\right] = 1 \Rightarrow \frac{2\log_2 x}{\log^2{}_2 x + 1} \in [1,2] \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$

$S_3 = \{2k+1 / k \in Z\} \cap \{2\} = \{2\}$

$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{2k+1, k \in N^*\} \cup \{2\} = S$.