$\ln e = 1$

Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică

Funcţia exponenţială

1). Puteri cu exponent real

a). ***Puteri cu exponent real pozitiv***

Fie $a > 1$. Se numeşte ***puterea x a lui a*** un număr real y care, pentru orice număr natural n , satisface inegalităţile :

$$a^{x'_n} \le y < a^{x''_n} ,$$

unde numărul real x>0 are reprezentărie zecimale x' şi x'' prin lipsă şi repectiv prin ados cu o eroare mai micş decât 10^{-n} .

Numărul y dat de definiţia precedentă se notează a^x şi se citeşte ***a la puterea x***.

Fie $0 < a < 1$ şi x un număr real pozitiv. Se numeşte ***puterea x a lui a*** un număr real y care, pentru orice număr natural n , satisface inegalităţile : $a^{x'_n} < y \le a^{x''_n}$.

Atenţie ! Oricare ar fi $a > 0$ şi $x > 0$ are loc $a^x > 0$.

b). ***Puteri cu exponent real negativ***

Dacă $a > 0$ şi $x > 0$ este un număr real negative, atunci prin definiţie are loc: $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$.

Prin convenţie se scrie $a^0 = 1$.

c). ***Proprietăţi ale puterilor cu exponent real***

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^x : a^x = (a^x) : (b^x)$.

2). Funcţia exponenţială

Definiţie. Funcţia f:**R**→(0,+∞), $f(x) = a^x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$ se numeşte ***funcţia exponenţială de bază a***.

Proprietăţi

1). a). Dacă a >1, atunci pentru $x > 0$ avem a^x>1 ar loc $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ are loc $a^x < 1$.

b). Dacă 0 <a <1, atunci pentru $x > 0$ avem a^x<1, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.

2). Dacă $x = 0$. atunci oricare ar fi $a > 0$ are loc $a^0 = 1$

3). Pentru $a > 1$, funcţia exponenţială f:**R**→(0,+∞), $f(x) = a^x$ este *strict crescătoare*, iar pentru $0 < a < 1$, funcţia este *strict descrescătoare.*

4). Funcţia exponenţială f:**R**→(0,+∞), $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ este *bijectivă.*

Demonstraţie.Se arată că f este injectivă. Fie, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1 \neq x_2$. Atunci are loc $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Să presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$. Atunci, după monotonia funcţiei exponenţiale, rezultă că :

1). Dacă $a > 1$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2). Dacă $0<a>1$, atunci $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analog, rezultă pentru $x_1 > x_2$.

Deci f este injectivă.

Surjectivitatea nu se poate demonstra în clasa a X-a. Dar, dacă se foloseşte graficul, se observă că oriceparalelă dusă prin puncteale codomeniului (0, +∞) graficul funcţiei este interesctat în cel puţin un punct.

5). Funcţia exponenţială f:**R**→(0,+∞), $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ este inversabilă. Inversa funcţiei exponenţiale se numeşte *funcţie logaritmică.*

3). Graficul funcţiei exponenţiale

Graficul funcţiei exponenţiale se construieşte prin puncte.

Exemplu.

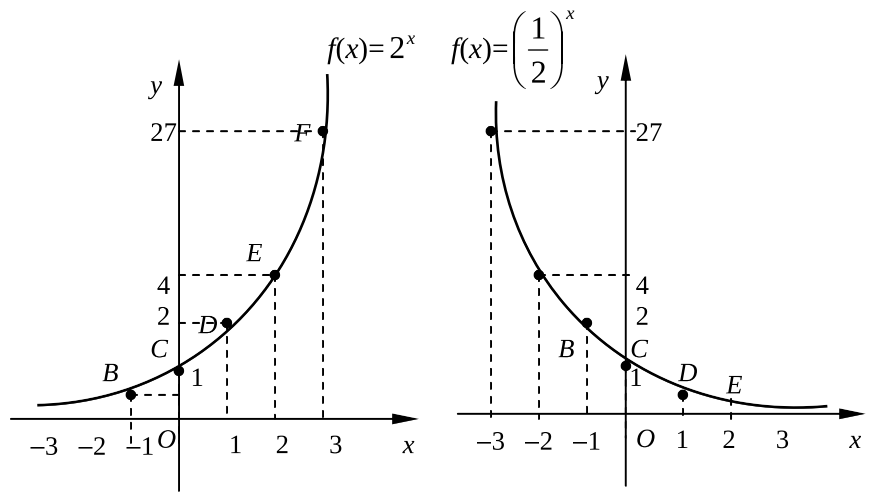
Să se construiască graficul funcţiei f:**R**→(0,+∞), $f(x) = a^x$, pentru $a \in \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$.

Se întocmeşte un tablou de valori pentu cele două cazuri :

x	–∞ +∞	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	–∞ +∞	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$		-27	-4	-2	1	$\frac{1}{2}$	4	27

Graficele celor două funcţii sunt reprezentate mai jos :



Analizând cele două grafice, constatăm că ele au următoarele proprietăţi :

1. Graficele se găsesc deasupra axei Ox ;
2. Trec prin punctul de coordonate (0, 1) ;
3. Graficul fiecărei funcţii este construit dintr-o singură ramură care ,,urcă’’
4. Graficul se apropie din ce în ce mai mult de axa Ox pozitivă dacă dacă $0<a<1$ şi de Ox negativă dacă $a > 1$.

CE TREBUIE SĂ ŞTIM

1. Orice putere raţională de forma $a^{\frac{m}{n}}$ se poate scrie sub forma unui radical de forma $\sqrt[n]{a^m}$.

2. Dacă $a>1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitivale ale acestui număr, este mai mare acela al cărei exponent este mai mare.

3. Dacă $0 < a < 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitivale ale acestui număr, este mai mare acela al cărei exponent este mai mic.

4. Prin numărul real $y = 3^{\sqrt{2}}$ se înţeleg aproximările:

$$
\begin{array}{lcl}
1 \le \sqrt{2} < 2 & & 3^{1} \le y < 3^{2} \\
1,4 \le \sqrt{2},1,5 & & 3^{1,4} \le y < 3^{1,5} \\
1,41 \le \sqrt{2} < 1,42 & \Rightarrow & 3^{1,41} \le y < 3^{1,42} \\
1,414 \le \sqrt{2} < 1,145 & & 3^{1,414} \le y < 3^{1,145} \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Probleme rezolvate

E1. C3-1. Ce se înţelege prin numărul real $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ se înţeleg aproximările:

E1. C3-1. Rezolvare

$$\begin{array}{ll}
1 \le \sqrt{2} < 2 & \left(\frac{1}{3}\right)^{2} < y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \\
1{,}4 \le \sqrt{2}{,}1{,}5 & \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}5} < y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}4} \\
1{,}41 \le \sqrt{2} < 1{,}42 \quad \Rightarrow & \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}42} < y \le 3^{1{,}41} \\
1{,}414 \le \sqrt{2} < 1{,}145 & \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}415} < y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}144} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

E2. C31-1. Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=3^x$ este strict crescătoare.
E2. C3-1. Rezolvare. Din $x_1 < x_2$, rezultă că există $u > 0$ astfel încât $x_2 = x_1 + u$. Atunci $a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1} - a^{x_1+u} = a^{x_1}(1-a^u)$ şi deoarece $u > 0$ după proprietatea funcţiei exponenţiale rezultă că $a^u > 1$. Aşadar, $a^{x_1} > 0 \wedge 1 - a^u < 0$, de unde $a^{x_1}(1-a^u) < 0$. Înseamnă că $a^{x_1} - a^{x_2} < 0 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ strict crescătoare.

E3. C32-1. Să se aducă la forma cea mai simplă $\left[\left(\sqrt{8}\right)^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}}$.

E3. C3-1. Rezolvare. Avem succesiv:

$$\left[\left(\sqrt{8}\right)^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[\left(\sqrt{8}\right)^{-\frac{13}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{13}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[(8)^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[\left(2^3\right)^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = \left[2^{-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{6}}{26}} =$$

$$\left[2^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{1}}\right]^{\frac{\sqrt{8}}{26}} = 2^{-\frac{13}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{26}} = 2^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

E4. C3-1. Să se compare m şi n dacă este adevărată inegaitatea:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^m \ge (\sqrt{3}-\sqrt{2})^n .$$

E4. C3-1. Rezolvare. Baza fiind subunitară $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$, pentru adevărul inegalităţii rezultă $m \le n$.

E5. C3-1. Să se afle mulţimea valorilor lui x pentru care:

$$(0{,}01)^3 \cdot (\sqrt{10})^x < 1 .$$

E5. C3-1. Rezolvare. Avem succesiv :

$$(0{,}01)^3 \cdot (\sqrt{10})^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{100}\right)^3 \cdot 10^{\frac{1}{2}\cdot x} < 1 \Leftrightarrow (10^{-2})^3 \cdot 10^{\frac{1}{2}\cdot x} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{-2\cdot 3} \cdot 10^{\frac{1}{2}\cdot x} < 1 \Leftrightarrow 10^{-6+\frac{x}{2}} < 10^0 \Leftrightarrow -6+\frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 12) .$$

E6. C3-1. Sunt echivalente inegalităţile $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ şi $2x < x-1$?

Fişă de studiu

S1. C3-1. Să se afle care număr din perechile de numere este mai mare:

a). $(0{,}5)^{-13}$ şi 2^{13} ; b). $5^{\sqrt{3}}$ şi $5^{\sqrt{2{,}5}}$; c). $\sqrt[11]{6^3}$ şi $\sqrt[15]{6^7}$.

S2. C3-1. Să se afle mulţimea valorilor lui x pentru care este adevărată inegalitatea :

a). $3^x \le 729$ b). $\left(\frac{1}{81}\right)^x \cdot \sqrt{3} > 1$; c). $32 \cdot (\sqrt[3]{2})^x > 0{,}25$.

S3. C3-1. Să se compare m şi n dacă este adevărată inegalitatea:

a). $(3\pi)^m \le (3\pi)^n$ b). $\left(\frac{5\pi}{16}\right)^m > \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n$; c). $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^m \le (\sqrt{7}-\sqrt{3})^n$.

S4. C3-1. Comparaţi numerele cu 1:

a). $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$ b). $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; c). $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$; d. $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$.

S5. C3-1. Să se afle x astfel încât $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$, unde $a > 0$ este un număr real pozitiv.

S6. C3-1. Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, $f(x) = 3^x$ este strict crescătoare.

S7. C3-1. Să se studieze monotnia funcţiei $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$

S7. L2-1. Să se traseze graficul funcţiilor $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

a). $f(x)=3^x$; b). $f(x)=2^{x-1}$; c). $f(x)=2^{|x|}$;

d). $f(x)=2^x-2$; e). $f(x)=2^{-|x|}$; c). $f(x)=2\cdot 3^x$.

S7. C3-1. Să se traseze graficul funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a). $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; b). $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; c). $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 1$;

d). $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$; e). $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$; c). $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Logaritmi

1). Logaritmi

Fie a>0 un număr realşi a≠1. Ecuaţia de forma $a^x = N,\ N > 0$ (1) are o soluţie unic determinată notată prin: $x = \log_a N$ (2).

$\log_a N$ se numeşte *logaritmul numărului pozitiv N* în baza *a*.

Din (1) şi (2) se obţine $a^{\log_a N} = N$, care ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza *a* pentru a obţine numărul dat.

De exemplu, a calcula $\log_2 32$,înseamnă a găsi un număr real *x* aşa încât să avem x^2 = 32. rezultă *x* = 5.

a). În practică se folosesc logaritmii în baza zece care se mai numesc *logaritmi zecimali*. Se notează cu $\lg$ în loc de $\log_{10}$

a). În matematică se folosesc logaritmii în baza $e = 2{,}718281...$ care se numesc *logaritmi naturali şi* se notează cu $\ln$ în loc de $\log_e$.

2). Proprietăţile logaritmilor

1. Dacă *A* şi *B* sunt două numere positive, atunci are loc:

$$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B .$$

Proprietatea se poate extinde pentru *n* numere pozitive $A_1, A_2, ..., A_n$ şi avem : $\log_a(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = \log_a(A_1) \cdot \log_a(A_2) \cdot ... \cdot \log_a(A_n)$.

2. $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$.

3. Dacă *A* este un număr pozitiv şi *m* un număr real arbitrar, atunci are loc : $\log_a A^m = m \log_a B$.

4. Dacă *A* este un număr pozitiv şi *n* ≥ 2 un număr natural, atunci are loc : $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log_a A$. Proprietatea 4 poate fi privită ca un caz particularal proprietăţii 3.

3). Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr

Dacă a şi b sunt două numere pozitivediferite de 1, iar A un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$$

Numită formula de schimbare a bazei unui logaritm.

Dacă în egalitatea de mai sus, $A = a$, atunci formula devineaaa ;

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

4). Operaţia de logaritmare a unei expresii

Operaţia de logaritmare are scopul de a transforma operaţii complicate de înmulţire, împărţire şi ridicare la putere în operaţii de adunare, scădere şi împărţire la numere naturae.

Să se logaritmeze expresia: $E = \dfrac{15 \cdot \sqrt[5]{231} \cdot \sqrt[3]{51}}{\sqrt{32 \cdot 72 \cdot 733}}$

Se logaritmează expresia într-o bază oarecare a :

$$\log_a E = \log_a \frac{15 \cdot \sqrt[5]{231} \cdot \sqrt[3]{51}}{\sqrt{32 \cdot 72 \cdot 733}} = \log_a (15 \cdot \sqrt[5]{231} \cdot \sqrt[3]{51}) - \log_a (\sqrt{32 \cdot 72 \cdot 733}) ==$$

$$\log_a 15 + \log_a \sqrt[5]{231} + \log_a \sqrt[3]{51}) - \left[\frac{1}{2} \cdot (\log_a 32 + \log_a 72 + \log\ 733)\right] =$$

$$= \log_a 15 + \frac{1}{5} \cdot \log_a 231 + \frac{1}{3} \cdot \log_a 51 - \left[\frac{1}{2} \cdot \log_a 32 + \frac{1}{2} \cdot \log_a 72 + \frac{1}{2} \cdot \log_a 733)\right].$$

În general, dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri şi radicali, putem să-i asociem o expresie, notată log$E$, în care apar sume, diferenţe de logaritmi înmulţite cu anumite numere raţionale.

5). Funcţia logaritmică

Prin definiţie, se numeşte ***funcţie logaritmică*** funcţia $f : \mathbf{R} \to (0,+\infty)$, $f(x) = \log_a x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$.

Proprietăţi :

1. $f(1) = 0$, ceea ce înseamnă că $\log_a 1 = 0$.
2. Funcţia logaritmică este monotonă şi anume dacă a>1, funcţia este strictcrescătoare, iar dacă 0<a <1, funcţia este strict descrescătoare.
3. Funcţia logaritmică este bijectivă.
4. Funcţia logaritmică este inversabilă. Inversafuncţiei ligaritmice în baza a este funcţia exponenţială $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^x$.

Dacă $x \in (0,+\infty)$ avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$

şi dacă $y \in \mathbf{R}$, atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$.

6). Graficu funcţiei exponenţiale

Graficul funcţiei exponenţiale se construieşte prin puncte.

Exemplu

Să se construiască graficul funcţiei f: $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log_a x$, pentru $a\in\left\{2,\ \frac{1}{2}\right\}$.

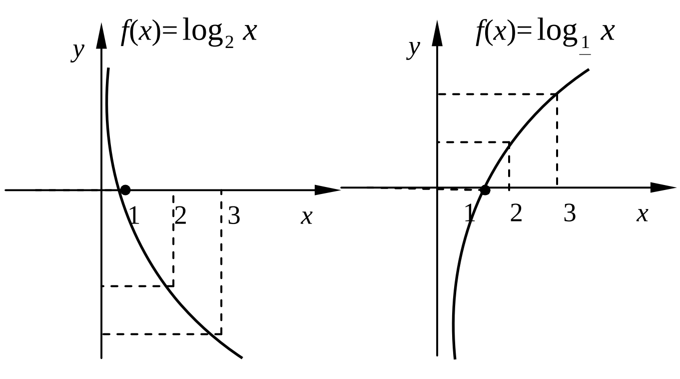
Se întocmeşte un tablou de valori pentu cele două cazuri :

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8	$+\infty$
$f(x)$	|	-3	-2	-1	0	1	3	

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8	$+\infty$
$f(x)$	|	3	2	1	0	-1	-3	

Graficele celor două funcţii reprezentate mai jos au proprietăţile :

1).Graficele se găsesc la dreapta axei Oy ;
2).Trec prin punctul de coordonate (1, 0) ;
3).Graficul fiecărei funcţii este construit dintr-o singură ramură care ,,urcă'' dacă baza $a > 1$ şi ,,coboară'' dacă baza $0<a<1$



4).Graficul se apropie din ce în ce mai mult de axa Oy pozitivă dacă $0<a<1$ şi de axa Oy negativă dacă $a > 1$.

5).Graficul funcţiei logaritmice este simetricul graficului funcţieiexponenţiale faţă de prima bisectoare.

Probleme rezolvate

E1. C3-2. Să se calculeze: a). $\log_2 128$; b). $\log_3 \frac{1}{27}$; c). $\log_{10} 0{,}001$.

E1. C3-2. Rezolvare. a). $\log_2 128 = x \Rightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$;

b). $\log_3 \frac{1}{27} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$; c). $\log_{10} 0{,}001 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^x = 0{,}001 \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$.

E2. C3-2. Să se calculeze: a). $\log_2 1000 - \log_2 125$; b). $\log_3 \sqrt[5]{81}$;

c). $\log_6 \frac{1}{54} + \log_6 \frac{1}{12}$; d). $3 \cdot \lg 25 + 2\lg 125 - \frac{1}{2} \cdot \lg 5$.

E2. C3-2. Rezolvare

a). $\log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

b). $\log_3 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5} \cdot \log_3 81 = \frac{1}{5} \cdot \log_3 3^4 = \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{5}$;

c). $\log_6 \frac{1}{54} + \log_6 \frac{1}{12} = \log_6 \left(\frac{1}{54} \cdot \frac{1}{12} \right) = \log_6 \frac{1}{6^4} = \log_6 6^{-4} = -4 \cdot 1 = 4$

d). $3 \cdot \lg 25 + 2\lg 125 - \frac{1}{2} \cdot \lg 5 = \lg \frac{25^3 \cdot 125^2}{\sqrt{5}} = \lg \frac{5^2 \cdot 5^3}{5^{\frac{1}{2}}} = \lg 5^{5-\frac{1}{2}} = \lg 5^{\frac{9}{2}}$

E3. C3-2. Să se arate că expresia $E = \frac{\log_2 x}{\log_3 x}$ nu depinde de *x*.

E3. C3-2. Rezolvare. Avem

$$E = \frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \frac{\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_2 2} = \frac{1}{\log_2 2} = 1.$$

E4. C3-2. Să se reprezinte pe acelaşi sistem de axe graficele funcţiilor :

$f : (0,+\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = 3^x$ şi $g : \mathbf{R} \to (0,+\infty),\ f(x) = \log_3 x$.

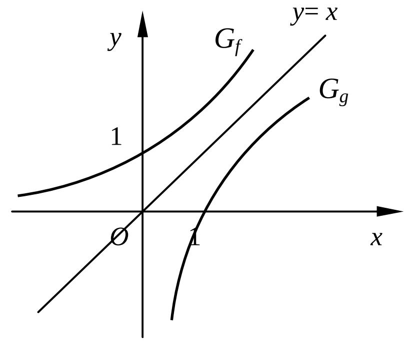
E4. C3-2. Rezolvare. Se întocmesc tabele de valori pentru cele două funcţii, considerând valori care să se poată calcula uşor.

x	$-\infty$ $+\infty$	-3	-2	-1	0	2	3
$f(x)$		$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	1	9	27

x	0 $+\infty$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	1	3	9

$g(x)$	|	-3	-2	-1	0	1	2

Graficele celor două funcţii sunt simetrice faţă de prima bisectoare a sistemului de axe *Oxy*.



Fişă de studiu

S1. C3-2. Să se calculeze:

a). $\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5}$; b). $\log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36}$;

c). $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0{,}5$; d). $\log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

S2. C3-2. Care dintre următoarele numere este mai mare:

a). $\log_2 5$ *sau* $\log_2 \frac{4}{5}$; b). $\log_5 \frac{1}{2}$ *sau* $\log_5 \frac{1}{7}$;

c). 2 *sau* $\log_3 10$; d). 3 *sau* $\log_2 7$;

S3. C3-2. Să se determine valorile lui x pentru ca următorii logaritmi să aibă sens :

a). $\log_2(x-1)$; b). $\log_4(x^2 + x - 2)$;

c). $\log_4(\log_2 x)$; d). $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$.

S4. C3-2. Determinaţi valorile lui x pentru care:

a). $\log_3 x > \log_3 4$; b). $\log_4(x^2 + x - 6) > 1$;

c). $\log_6(x^2 - 1 \geq \log_6(4x+4)$; d). $\log_{\frac{1}{2}}(2x) \geq 0$.

S5. C3-2. Ştiind că lg7 = p şi lg5 = q , să se exprime în funcţie de p şi q

a). $\lg 0{,}7$; b). $\lg \sqrt[3]{7}$; c). $\lg 175$; d). $\lg 7\sqrt{5}$.

S6. C3-2. Să se determine expresia lui x astfel încât ;

a). $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 4 - \log_2 5$;

b). $\log_3 x = 2\log_3 a + 3\log_3(a+b) - 4\log_3(a-b)$;

c). $\log_a x = 2\log_a 7 + 3\log_a 6 - 4\log_a 5$

S7. C3-2. Să se arate că expresiile următoare nu depend de x

a). $E = \dfrac{\log_7 x^2}{\log_8 x^2}$; b). $F = \dfrac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{x}}$.

S8. C3-2. Să se logaritmeze expresiie:

a). $E = 41^2 \cdot \sqrt[13]{41 \cdot 35^4}$; b). $F = \dfrac{21}{4} \cdot \sqrt[5]{41 \cdot \sqrt[7]{31^{11}}}$;

c). $T = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}$; d). $S = \dfrac{2(a-b)}{3(a+b)} \cdot \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.

S8. C3-2. Să se reprezinte graphic funcţiile:

a). $f_1 : (-1,+\infty) \to \mathbf{R},\ \ f_1\ (x) = \log_2(x+1)$;

b). $f_2 : (0,+\infty) \to \mathbf{R},\ \ f_2\ (x) = \log_2 x^3$;

c). $f_3 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ \ f_1\ (x) = \log_5 x^2$;

d). $f_4 : \mathbf{R} \setminus \{3\} \to \mathbf{R},\ \ f_4\ (x) = \log_6 |\,x-3\,|$.

Ecuaţii

1). Ecuaţii exponenţiale

Se numeşte ecuaţie exponenţială, ecuaţia în care necunoscuta este exponent sau în care este exponentul este o expresie.

În practică, atunci când avem de rezolvat o ecuaţie exponenţială, vom proceda astfel :

Pasul 1. se impun condiţii de existenţă exponenţilor şi bazei atunci când este cazul ;

Pasul 2. se fac transformări echivalente folosind proprietăţie funcţiei exponenţiale până se obţin ecuaţii agebrice cunoscute ;

Pasul 3. se verifică dacă valorile obţinute la pasul 2 aparţin domeniului ecuaţiei sau se fac veificări în ecuaţia dată iniţial.

a). *Ecuaţii de tipul* $a^{f(x)} = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$.

Pe baza injectivităţii funcţiei exponenţiale ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia : $f(x) = \log_a b$. În aceste ecuaţii b trebuie exprimat ca o putere a ui a(atunci când este posibil).

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia : $5^{x^2-x-2} = 625$.

$$5^{x^2-x-2} = 625 \Rightarrow 5^{x^2-x-2} = 5^4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

Prin rezolvarea ecuaţiei de gradul doi se obţin soluţiile : $S = \{-2,3\}$.

b). *Ecuaţii de tipul* $a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1$.

Pe baza injectivităţii funcţiei exponenţiale ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia algebrică $f(x) = g(x)$, care se rezolvă cu metode cunoscute.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia : $3^{x^2-x-4} = 9^{x-2}$.

$3^{x^2-x-4} = 9^{x-2} \Rightarrow 3^{x^2-x-4} = 3^{2(x-2)} \Rightarrow x^2 - x - 4 = 2(x-2) \Rightarrow x^2 - 6x = 0$.

Prin rezolvarea ecuaţiei de gradul doi se obţin soluţiile : S = {0,6}.

c). *Ecuaţii de tipul* $a^{f(x)} = b^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$.

În acest caz se logaritmează ecuaţia convenabil întro anumită bază şi apoi se fac transformări pentru a obţine o ecaţie algebrică mai simplă.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia : $2^x = 3^{2x+1}$.

Pe baza injectivităţii funcţiei logaritmice se obţine prin logaritmare în baza 10 ecuaţia echivalentă :

$$x \lg 2 = (2x+1)\lg 3 \Rightarrow x(\lg 3 - \lg 2) = -\lg 3 \Rightarrow x = -\frac{\lg 3}{2\lg 3 - \lg 2}.$$

d). *Ecuaţii de tipul*

$$ma^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0\ ,\ a > 0,\ a \neq 1,\ m, n, p \in \mathbf{R}.$$

În acest caz se face substituţia $a^{f(x)} = t,\ t > 0$ şi se formează o ecuaţie

de gradul doi, de forma $mt^2 + nt + p + 0$, cu soluţiile căreia se revine la substituţia făcută. În final se verifică dacă valorile obţinute verifică condiţiile de existenţă ale ecuaţiei sau se verifică direct dacă egalitatea dată iniţia este adevărată.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia : $4^x + 2^x = 272$.

Se observă o substituţie de forma $2^x = t,\ t > 0$:

$$4^x + 2^x = 272 \Rightarrow (2^2)^x + 2^x = 272 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 272 = 0.$$

Ecuaţia de gradul doi ataşată $t^2 + t - 272 = 0$, are soluţiile $t \in \{-17, 16\}$. Revenind la substituţie, se acceptă numai t = 16. Se obţine $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$.

d). *Ecuaţii de tipul*

$$a^{f(x)} + b^{g(x)} + c = 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1.$$

Ecuaţia de gradul doi ataşată $t^2 + t - 272 = 0$, are soluţiile $t \in \{-17, 16\}$. Revenind la substituţie, se acceptă numai valoarea pozitivă t = 16. Se obţine $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$.

2). Ecuaţii logaritmice

Se numeşte ecuaţie logaritmică, ecuaţia în care necunoscuta este sub logaritm sau la baza logaritmului.

În practică, vom proceda astfel :

Pasul 1. se impun condiţii de existenţă asupra bazei logaritmului şi a expresiilor de sub logaritm ;

Pasul 2. se fac transformări echivalente folosind proprietăţiele funcţiei logaritmice şi a logaritmilor până se obţin ecuaţii agebrice cunoscute ;

Pasul 3. se verifică dacă valorile obţinute la pasul 2 aparţin domeniului ecuaţiei sau se fac veificări în ecuaţia dată iniţial.

a). *Ecuaţii de tipul* $\log_a f(x) = b,\ a > 0,\ a \neq 1,$.

Pe baza definiţiei logaritmului ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia de forma $f(x) = a^b$. De aici se obţin soluţiile.

b). *Ecuaţii de tipul*

$$\log_a f(x) = \log_b g(x),\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1.$$

Pe baza injectivităţii funcţiei logaritmice ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia algebrică $f(x) = g(x)$, care se rezolvă.

c). *Ecuaţii de tipul*

$m\log_a^2 f(x) + n \cdot \log_a f(x) + p = 0$, $a > 0,\ a \neq 1,\ m, n, p \in \mathbf{R}$ În acest caz se face substituţia $\log_a f(x) = t,\ t > \mathbf{R}$ şi se formează o ecuaţie de gradul doi, de forma $mt^2 + nt + p + 0$, cu soluţiile căreia se revine la substituţia făcută. În final se verifică dacă valorile obţinute verifică condiţiile de existenţă ale ecuaţiei sau se verifică direct ca egalitatea dată iniţial să fie adevărată.

3). Sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmce

Se numeşte *sistem de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice*, sistemul în care necunoscutele sunt la exponent, la baza unui logaritm sau în expresii sub logarimi.

În practică, atunci când avem de rezolvat un *sistem de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice*, vom proceda astfel :

Pasul 1. se impun condiţii de existenţă asupra bazelor, exponenţilor atunci când este cazul ;

Pasul 2. se fac transformări şi substituţii convenabile folosind proprietăţie funcţiei exponenţiale şi logaritmice până se obţin sisteme agebrice cunoscute ;

Pasul 3. se verifică dacă valorile obţinute la pasul 2 aparţin domeniului sistemului sau se fac veificări în ecuaţiile sistemului dat iniţial.

4). Inecuaţii exponenţiale şi logaritmce

Se numesc *inecuaţii exponenţiale sau logaritmce*, inecuaţiile în care necunoscutele sunt la exponent, la baza unui logaritm sau în expresii sub logarimi.

În practică, atunci când avem de rezolvat o *inecuaţie exponenţială sau logaritmică*, vom proceda astfel :

Pasul 1. se impun condiţii de existenţă asupra bazei, exponenţilor, expresiilor desub logaritmi, atunci când este cazul ;

Pasul 2. se fac transformări şi substituţii convenabile folosind proprietăţie funcţiei exponenţiale şi logaritmice până se obţin inecuaţii agebrice cunoscute ;

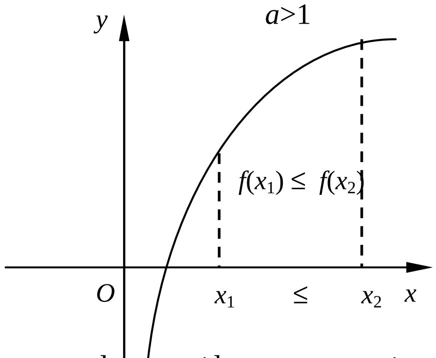
Pasul 3. se rezolvă inecuaţiile obţinute.

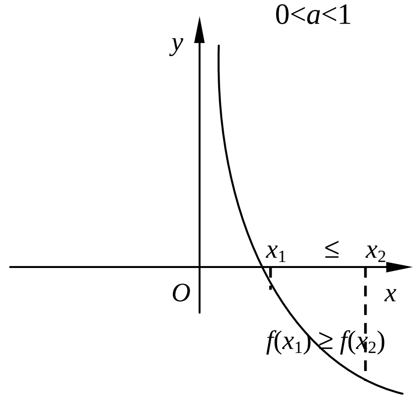
Pasul 4. se intersectează souţiile obţinute cu nulţimea de existenţă impusă pentru a obţinesoluţia finală.

Pentru inecuaţii exponenţiale

Se observă că :

a>1



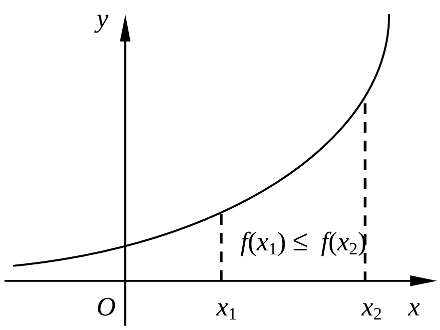


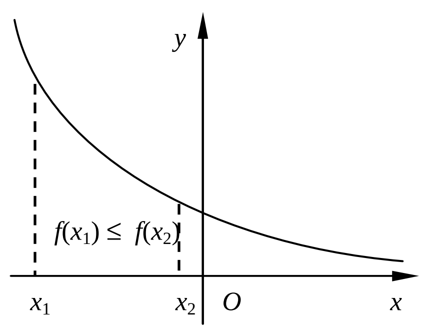
$\log_a x_1 \le \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 \le x_2$

$\log_a x_1 \ge \log x_2 \Leftrightarrow x_1 \le x_2$

a). Dacă baza exponenţialei a >1, sensul inegalităţii dintre imagini se păstrează pentru argumente.

b). Dacă baza 0 < a < 1, sensul inegalităţii dintre imagini se schimbă pentru argumente.





$a^{x_1} \le a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \le x_2$

$a^{x_1} \le a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$

Exemplul 1. Să se rezolve inecuaţia : $2^{x^2-4x} > \frac{1}{8}$.

Inecuaţia nu are restricţii, domeniul maxim fiind **R.** Deoarece $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ şi folosind faptul că baza este supraunitară, se obţine:

$$x^2 - 4x > -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)\,.$$

Pentru inecuaţii logaritmice

Se observă că :

a). Dacă baza logaritmului este a >1, sensul inegalităţii dintre imagini se păstrează pentru argumente.

b). Dacă baza logaritmului este 0 < a < 1, sensul inegalităţii dintre imagini se schimbă pentru argumente.

Exemplul 2. Să se rezolve inecuaţia : $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_3 27$.

Domeniul inecuaţiei este cerut de $2x-1>0 \Rightarrow x \in (\frac{1}{2},+\infty)$. Deoarece $\log_3 27 = -3$, rezultă că $2x-1 > -3 \Rightarrow x \in (-2,+\infty)$,

Soluţia inecuaţiei este dată de intersecţia : $x \in (\frac{1}{2},+\infty) \cap (-2,+\infty) = (\frac{1}{2},+\infty)$

Probleme rezolvate

E1. C3-3. Să se rezolve ecuaţia : $5^{7^x} = 7^{5^x}$.

E1. C3-3. Rezolvare. Se logaritmează ţn baza 10 :

$$5^{7^x} = 7^{5^x} \Rightarrow 7^x \lg 5 = 5^x \lg 7 \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x = \frac{\lg 5}{\lg 7}.$$

Printr-o nouă logaritmare în aceeaşi bază, rezultă

$$x \lg\frac{7}{5} = \lg\frac{\lg 5}{\lg 7} \Rightarrow x \lg\frac{7}{5} = \lg(\lg 7)) - \lg(\lg 5)) \Rightarrow x = \frac{\lg(\lg(7)) - \lg(\lg(5))}{\lg 7 - \lg 5}$$

E2. C3-3. Să se rezolve ecuaţia : $3^{2x} \cdot 5^{2x-3} = 7^{x-1} \cdot 4^{x+3}$.

E2. C3-3. Rezolvare. Se logaritmează în baza 10 :

$$2x \lg 3 + (2x-3)\lg 5 = (x-1)\lg 7 + (x+3)\lg 4$$

După calcule şi scoaterea factorului comun x, rezultă că :

$$x(2\lg 3 + 2\lg 5 - \lg 7 - \lg 4) = 3\lg 5 - \lg 7 + 3\lg 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\lg 5 - \lg 7 + 3\lg 4}{2\lg 3 + 2\lg 5 - g\, 7 - 4} \Rightarrow x = \frac{\lg\frac{125 \cdot 64}{7}}{\lg\frac{225}{28}}.$$

E3. C3-3. Să se rezolve ecuaţia : $\log_x(x^2 - x + 9) = 2$.

E3. C3-3. Rezolvare. Condiţiile de existenţă pentru logaritm sunt :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - x + 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0,+\infty).$$

După transformarea membrului doi în logaritm şi din propretatatea de injectivitate a funcţiei logaritmice, rezultă ecuaţia:

$$x^2 - x + 9 = x^2 \Rightarrow x = 9.$$

E4. C3-3. Să se rezolve ecuaţia : $6^x + 4^x = 9^x$.

E4. C3-3. Rezolvare

Ecuaţia se poate rezova printr-o substituţie. Se observă că prin împătrţirea la 9^x se obţine $\left(\frac{6}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \Rightarrow \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$. Făcând substituţia $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t,\ t > 0$, rezultă că ecuaţia ataşată $t^2 + t - 1 = 0$ are soluţiile $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Pentru soluţia pozitivă acceptată se obţine soluţia ecuaţiei date printr-o logaritmare în baza 10: $x = \frac{\lg \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg \frac{2}{3}}$.

E5. C3-3. Să se rezolve ecuaţia : $\lg(x^2 - 15) = \lg(x-3)$.

E5. C3-3. Rezolvare. Condiţiile de existenţă sunt :

$$\begin{cases} 10 > 0 \\ 10 \neq 1 \\ x - 15 > 0,\ \ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 15 \Rightarrow x \in (15, +\infty)$$

Din proprietatea de injectivitate a funcţiei logaritmice, rezultă egalitatea argumentelor :

$$x^2 - 15 = x - 3 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x \in \{-3, 4\}.$$

Souţia acceptată de condiţiile de existenţă este x = 4.

E6. C3-3. Să se rezolve sistemul : $\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \cdot 3^{4x+2} \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}} \end{cases}$

E6. C3-3. Rezolvare. Nu sunt necesare condiţii de existenţă pentru ecuaţiile sistemului. Mulţimea maximă este **R×R**. După transformări ale puterilor se obţine sistemul echivalent $\begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7} \\ 3^{x+y} = 3^{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 3 = 4x + 7 \\ x + y = 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2,3)\}$.

E7. C3-3. Să se rezolve sistemul : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$

E7. C3-3. Rezolvare. Se impun condiţiile de existenţă pentru ecuaţiile sistemului : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ y \in (0, +\infty) \end{cases}$. Se obţine succesiv :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg(xy) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ xy = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \\ s^2 - 2p = 425 \\ p = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \pm 25 \\ p = 100 \end{cases}.$$

Sistemul simetric are soluţiile simetrice

$$\begin{cases} s = 25 \\ p = 100 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 25t + 100 = 0 \Rightarrow t_{1,2} \in \{5,20\} \Rightarrow S = \{(5,20),(20,5)\}$$

Al doilea sistem simetric cu soluţiile ecuaţiei ataşate

$$\begin{cases} s = -25 \\ p = 100 \end{cases} \Rightarrow t^2 + 25t + 100 = 0 \Rightarrow t_{1,2} \in \{-20,-5\},$$

nu verifică condiţiile iniţiale ale sistemului.

E8. C3-3. 16. Dacă $a,b \in (0,1)\cup(1,\infty)$ şi $k \in [0,\infty)$ să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} a^{xz} - kb^{y} = a^2 - kb^2 \\ a^{z} + kb^{\frac{y}{2}} = a + kb \\ a^{z(x-1)} + b^{\frac{y}{2}} = a + b \end{cases}.$$

Fişă de studiu

S1. C3-3. Să se rezolve ecuaţiile ;

a). $4^x = 1024$; b). $9^x = \dfrac{1}{81}$; c). $2^{2x-3} = 32$; d). $8^x = \dfrac{1}{128}$;

e). $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-5}$; f). $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

S2. C3-3. Să se rezolve ecuaţiile ;

a). $7^{x+2} + 4\cdot 7^{x-1} = 347$; b). $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$;

c). $3^{x+1} + 5\cdot 3^{x-1} - 7\cdot 3^x + 21 = 0$;

S3. C3-3. Să se rezolve ecuaţiile ;

a). $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$; b). $9^x - 3^x - 6 = 80$;

c). $2\cdot 25^x = 10^x + 4^x$; d). $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \dfrac{3}{2}$.

S4. C3-3. Să se rezolve ecuaţiile ;

a). $\log_2(x-1) = \log_2(x^2 - x - 16)$; b). $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$;

c). $\dfrac{1}{12}\lg^2 x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\lg x$; d). $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$.

S5. C3-3. Să se rezolve ecuaţia :

a). $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

S6. C3-3. Să se rezolve ecuaţia : $2\lg(x-1) = \dfrac{1}{2}\lg x^2 - \lg\sqrt{x}$.

S7. C3-3. Să se rezolve ecuaţiile :

a). $\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2$.

b). $\lg(x+7)(3x+1)=2$.

S8. C3-3. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 = 0$

S9. C3-3. Să se rezolve ecuaţia: $\log_2 x + \log_3 x = 1$

S10. C3-3. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3 x + \log_x 3 = 2$

S11. C3-3. Să se rezolve ecuaţia: $x^{\lg x + 2} = 1000$

S12. C3-3. Să se rezolve ecuaţia: $\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}$.

S13. C3-3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a, a > 0, \neq 1.$$

S14. C3-3. Să se verifice identitatea:

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \ldots.. + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

S15. C3-3. Să se rezolve inecuaţiile:

a). $\lg(x^2-3) > \lg(x+3)$; b). $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \le 0$;

S16. C3-3. Să se rezolve în **R×R** sistemele:

a). $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y+1} = 1 \end{cases}$; b). $\begin{cases} x - y = 90 \\ \lg x + \lg y = 3 \end{cases}$;

c). $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$; b). $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y^x \\ y^{\sqrt{x}} = x^y \end{cases}$.

Exerciţii de aprofundare

A1. Să se verifice identitatea

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \ldots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

Deoarece prin schimbarea bazei logaritmului obţinem $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x$.

$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right]\log_a x = \frac{n}{n+1}\log_a x$. Rămâne de demonstrat prin inducţie că: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

A2. Să se găsească perechile de numere reale (x,y) care verifică inegalitatea

$$\log_{|x|}(\cos 1) > \log_y(\cos 1).$$

A3. Dacă $a \in \mathbf{R}, a > 0$, atunci $a^x \ge x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$, dacă şi numai dacă $a = e$.

A4. Să se rezolve inecuaţia $3^x + 4^x > 5^x$.

A5. Să se arate că nu există numere reale $N > 0, \neq 1$ astfel încât, dacă *a* şi *b* sunt numere prime între ele, $\log_b N$ şi $\log_a N$ să fie amândouă raţionale.

A6. Să se rezolve ecuaţia

$$\log_x 2x + \log_{2x} 4x = \frac{7}{2}.$$

A7. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a, a > 0, \neq 1.$$

A8. Să se verifice identitatea:

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + ... + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

Rezolvari

A2. Condiţiile de existenţă:

$|x| > 0, |x| \neq 1, y > 0, y \neq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$- mulţime simetrică şi $y \in (0,1) \cup (1, \infty)$. Deoarece $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} < \cos 1 < \cos\frac{\pi}{4}$, adică $\cos 1 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \subset (0,1)$, deci baza logaritmilor este subunitară. Trecem logaritmii la baza cos1 şi atunci inecuaţia este echivalentă cu

$$\frac{1}{\log_{\cos 1}|x|} > \frac{1}{\log_{\cos 1} y} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{\cos 1}|x|} - \frac{1}{\log_{\cos 1} y} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{\cos 1} y - \log_{\cos 1}|x|}{\log_{\cos 1}|x| \cdot \log_{\cos 1} y} > 0.$$

Se observă că inecuaţia este simetrică în raport cu *x*, deci dacă (*x*,*y*) este soluţie, atunci şi (−*x*,*y*) este soluţie. Astfel soluţiile inecuaţiei sunt puncte ale planului xOy simetrice faţă de axa *Oy*. Vom considera deci soluţiile inecuaţiei pentru $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$ si $y \in (0,1) \cup (1, \infty)$. Avem următoarele patru cazuri:

$$1^0 \begin{cases} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} > 0 \\ \log_{\cos 1} x > 0 \\ \log_{\cos 1} y > 0 \end{cases} \quad 2^0 \begin{cases} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} < 0 \\ \log_{\cos 1} x < 0 \\ \log_{\cos 1} y > 0 \end{cases} \quad 3^0 \begin{cases} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} < 0 \\ \log_{\cos 1} x > 0 \\ \log_{\cos 1} y < 0 \end{cases} \quad 4^0 \begin{cases} \log_{\cos 1} \frac{y}{x} > 0 \\ \log_{\cos 1} x < 0 \\ \log_{\cos 1} y < 0 \end{cases}.$$

Avem $\log_{\cos 1} \frac{y}{x} > 0 \Leftrightarrow y < x$, punctele sunt situate sub semidreapta $y = x$;

$\log_{\cos 1} \frac{y}{x} < 0 \Leftrightarrow y > x$, punctele sunt situate deasupra semidreptei $y = x$;

$\log_{\cos 1} x > 0 \Leftrightarrow x < 1, x \in (0,1)$, punctele sunt situate între dreptele de ecuaţie $x = 0$ şi $x = 1 \| Oy$;

$\log_{\cos 1} x < 0 \Leftrightarrow x > 1, x \in (1,\infty)$, punctele sunt situate la dreapta dreptei de ecuaţie $x = 1$;

$\log_{\cos 1} y > 0 \Leftrightarrow y < 1, y \in (0,1)$, punctele sunt situate între dreptele $y = 0$ si $y = 1 \parallel Ox$

$\log_{\cos 1} y < 0 \Leftrightarrow y > 1, y \in (1,\infty)$, punctele sunt situate deasupra dreptei $y = 1$ Ox

Rezultă următoarele sisteme de inecuaţii:

$$1^0 \begin{cases} y < x \\ x \in (0,1) \\ y \in (0,1) \end{cases} \quad 2^0 \begin{cases} y > x \\ x \in (1,\infty) \\ y \in (0,1) \end{cases} \quad 3^0 \begin{cases} y > x \\ x \in (0,1) \\ y \in (1,\infty) \end{cases} \quad 4^0 \begin{cases} y < x \\ x \in (1,\infty). \\ y \in (1,\infty) \end{cases}$$

1^0 Soluţiile sunt în regiunea haşurată vertical.

2^0 Nu are soluţii.

3^0 Are soluţii în regiunea haşurată orizontal.

4^0 Are soluţii în regiunea haşurată oblic.

Pentru inecuaţia iniţială vom considera şi soluţiile simetrice faţă de axa Oy. Evident, frontierele acestor regiuni nu reprezintă soluţii, pentru că inegalităţile sunt stricte.

A3. Inegalitatea este echivalentă cu $a^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Fie funcţia

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}., f(x) = a^x - x - 1; f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow 0$ este punctul de minim. Se poate aplica teorema lui Fermat. Rezultă că

$$f'(0) = 0. f'(x) = a^x \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e.$$

Reciproc, dacă $a = e \Rightarrow$

$f(x) = e^x - x - 1,\ f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Avem

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0) = 0$ min	$\nearrow$	$+\infty$

Din acest tablou se vede că $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbf{R}$.

A4. Ecuaţia $3^x + 4^x = 5^x$, are soluţia x=2, care este unică aşa cum rezultă din faptul că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$ este strict descrescătoare. Semnul funcţiei:

dacă $x \leq 2,\ f(x) \geq 0$;

dacă $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2)$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$f(x)$		+	0	−	

A5. Presupunem, prin absurd, că există $\frac{m}{n}, m, n \in Z, n \neq 0, (m,n) = 1$ astfel încât

$\log_a N = \frac{m}{n}$ şi că există $\frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0, (p,q) = 1$ astfel încât $\log_b N = \frac{p}{q} \Rightarrow$

$N = a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{p}{q}} \Rightarrow a^{mq} = b^{np}$, contradicţie pentru că $(a,b) = 1$, a şi b fiind prime între ele, $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$.

A5. Punem condiţii de existenţă: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$.

Ecuaţia devine succesiv:

$$\log_x 2 + 1 + \log_{2x} 2 + 1 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 x + 1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(2\log_2 x + 1) = 3\log_2^2 x + 3\log_2 x \Leftrightarrow$$

$$3\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1 \pm 5}{6} \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \text{ sau } \log_2 x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2$$

sau $x = 2^{-\frac{2}{3}}$.

A7. Punem condiţii de existenţă: $x > 0, x \neq 1$. Pentru a sunt puse în enunţ $a > 0, a \neq 1$;

$$\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_a x + \log_x a + 2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a^2 x + 2\log_a x + 1}{4\log_a x} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\log_a x + 1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\log_a x} \geq 0$$

$\Rightarrow \log_a x > 0 \,(1) \Rightarrow x < 1$, dacă $a \in (0,1)$, $x > 1$, dacă $a \in (1, \infty)$ $\Rightarrow \log_a x = |\log_a x|$, întrucât $\log_a x > 0$. Deci primul radical este egal cu $\frac{\log_a x + 1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_a x}}$, iar al doilea radical $\left|\frac{\log_a x - 1}{2}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{\log_a x}}$, astfel încât ecuaţia devine $\frac{\log_a x + 1 + |\log_a x - 1|}{2\sqrt{\log_a x}} = a$.

Pentru explicitarea modulului, avem

1^0 $\log_a x \geq 1 \Rightarrow \log_a x - 1 \geq 0 \Rightarrow |\log_a x - 1| = \log_a x - 1$.

Ecuaţia devine

$$\frac{\log_a x+1+\log_a x-1}{2\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow \frac{2\log_a x}{2\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow \frac{\log_a x}{\sqrt{\log_a x}} = a > 0$$, prin ipoteză.

$$\Leftrightarrow \log_a x = a^2 \Leftrightarrow x = a^{a^2}; \log_a x > 1 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a > 1$$

Dacă $a > 1, x = a^{a^2} > 1$, care arată că acest x este soluţie.

Dacă $0 < a < 1, x = a^{a^2} < 1$ şi deci acelaşi x este soluţie. Deci $x = a^{a^2}$ este soluţie.

2^0 $\log_a x \le 1 \Rightarrow \log_a x - 1 \le 0 \Rightarrow |\log_a x - 1| = 1 - \log_a x$. Ecuaţia devine

$$\frac{\log_a x+1+1-\log_a x}{2\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\log_a x}} = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_a x} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_a x = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \Leftrightarrow x = a^{\left(\frac{1}{a}\right)^2},$$

care admite soluţii numai dacă

$$\frac{1}{a^2} < 1 \Rightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a > 1.$$

Ecuaţia admite soluţiile $x = a^{a^2}$ şi $x = a^{\frac{1}{a^2}}$, numai dacă $a > 1$.

A8. $x > 0$. Pentru $x = 1$, egalitatea este verificată. Acum $x > 0, x \ne 1$. Schimbând baza, trecând la baza x, avem succesiv:

$$\log_{a^2} x + \log_{a^6} x + \ldots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \frac{1}{2\log_x a} + \frac{1}{6\log_x a} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)\log_x a} =$$

$$= \frac{1}{\log_x a}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = (\log_a x)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= (\log_a x)\frac{n}{n+1} = \log_a x^{\frac{n}{n+1}} = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.\text{c.c.c.d.}$$

<u>Probleme nerezolvate</u>

1. Se consideră funcţia $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$, dată de legea $f(x) = \ln(\ln x)$..
Să se arate că funcţia f este o bijecţie şi să se construiască inversa ei.

2. Să se rezolve în **R** ecuaţiile: $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$; $9^x - 5^x - 4^x = 2\sqrt{20^x}$.

3.. Se consideră numerele reale $a = \log_3 6, b = \log_2 5$.

a) Să se arate că $a < b$. **b).** Care dintre numerele reale următoare $a = \log_x(x+3), b = \log_{x+1}(x+4)$, cu $x \in (1, \infty)$ este mai mare.

4. Să se determine toate numerele reale m, astfel încât inegalitatea

$(m+1)e^{-2x} + m(e^{-x} + 1) > 0$, să fie adevărată pentru orice x real.

5. Să se calculeze suma: $\dfrac{\log_b a+\log_b^2 a+\log_b^3 a+...+\log_b^n a}{\log_b a+\log_b a^2+\log_b a^3+...+\log_b a^n}$.

6.Să se afle domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f:E\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată de legea $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-5\ln x+6}$; $f(x)=\arcsin(\ln x)$.

7.Să se rezolve inecuaţia : $\log_x 3\cdot\log_{3x} 3\geq\log_{9x} 3$.

8.Să se rezolve ecuaţia : $\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln(x+\lambda)}=2$,unde λ este un parametru real,iar $a>0$.

9.Fie a,b,c numere reale distincte şi presupunem că α,β,γ sunt numere reale astfel încât pentru orice număr real x $\alpha\cdot e^{ax}+\beta\cdot e^{bx}+\gamma\cdot e^{cx}=0$ .Să se arate ca $\alpha=\beta=\gamma=0$.

10.Să se rezolve inecuaţia : $\dfrac{\log_a^2 x-3\log_a x+2}{x^2-4}>0$, $0<a<1$.

11.Să se determine relaţia între a şi b,dacă $\log_a x-\log_b x=\log_{\frac{b}{a}} x$, $\forall x\in(0,\infty)$.

12.Să se rezolve în **R** ecuaţiile:

$$(ab)^x+a^{2x}=b^{2x},\ a,b\in(0,1)\cup(1,\infty),\ a\neq b$$

$$\left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x=194.$$

13.Să se determine toate numerele reale m, astfel încât inegalitatea

$m\cdot 4^x+4(m-1)2^x+m>1$ să fie adevărată pentru orice x real.

14.Să se rezolve inecuaţia $\max\left(a^x,\dfrac{1}{a^x}\right)>a^{\max\left(x,\frac{1}{x}\right)}, a>0$.

15. Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} g(x)-\dfrac{1}{4}, & x\in(-\infty,-1)\\ 2, & x=-1\\ g(x)-4, & x\in(-1,\infty)\end{cases}\quad \text{unde } g(x)=2^{|x+1|+|x-1|}+2^{|x+1|-|x-1|}$$

16.Să se demonstreze inegalitatea $\log_{x-1} N>\log_x N$, unde $x>2$ si $N>1$ şi apoi $\log_{x-1}\dfrac{x^2+y^2}{x-1}>\log_x 2y, x>2, y>0.$

17.Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care inegalitatea $\log_{\frac{a-1}{a+1}}(x^2+3)\geq 1$ este adevărată pentru orice x real.

18. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to f(\mathbf{R}),\ f(x)=a^x+a^{-x}$, cu $a>0, a\neq 1$.

- **a.** Să se studieze monotonia funcţiei f.
- **b.** Să se rezolve ecuaţia: $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=m,\ m\in\mathbf{R}.$

19. Sa se rezolve ecuaţia:

$$3\log_{1000}(x-1)+2\log_{100}(x+3)-2^{x+3}\log_{10}(x^2+2x-3)=0.$$

20. Să se găsească perechile de numere reale (x,y) care verifică inegalitatea

$$\log_{|x|}(\cos 1)>\log_y(\cos 1).$$

21. Dacă $a\in\mathbf{R}, a>0$, atunci $a^x\geq x+1, \forall x\in\mathbf{R}$, dacă şi numai dacă $a=e$.

22. Să se rezolve inecuaţia $3^x+4^x>5^x$.

23. Să se arate că nu există numere reale $N>0,\neq 1$ astfel încât, dacă a şi b sunt numere prime între ele, $\log_b N$ şi $\log_a N$ să fie amândouă raţionale.

24. Să se rezolve ecuaţia: $\log_x 2x+\log_{2x}4x=\frac{7}{2}$.

25. Să se rezolve ecuaţia

$$\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a, a>0,\neq 1.$$

26. Să se verifice identitatea: $\log_{a^2}x+\log_{a^6}x+.....+\log_{a^{n(n+1)}}x=\log_a\sqrt[n+1]{x^n}$.

27.Să se rezolve inecuaţia :

$$\log_{x^2+x+1}(2x^2-x-1)<\log_{x^2+x+1}(3x^2-4x+1)$$

28. Se consideră ecuaţia $x^2-(\log_a m)\cdot x+3\log_a m-8=0, m$ este un parametru, $m\in(0,\infty)$, iar a constanta reală, cu a >0 si $a\neq 1$. Să se determine m, astfel încât :

a). ambele rădăcini să fie in [0,3]; **b)**. una din rădăcini să fie in [0,3].

29. Să se reprezinte grafic $f(x)=\log_a|[x]|$, unde a>0, $a\neq 1$.

30. Să se rezolve ecuaţia: $(\log_{px}A+\log_{pq}A)\log_p A=2\log_{px}A\cdot\log_{pq}A$, unde A,p,q sunt constante: A>0, px>0, $\neq 1$, p>0, $\neq 1$,q>0, $\neq 1$, pq>0, $\neq 1$.

31. Să se arate că 4< $\log_2 3+\log_3 5+\log_5 8<5$.

32. Să se arate că funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=x+a^x$, cu a supraunitar, este bijectivă.

33.Să se arate că $\log_2 3+\log_3 4+\log_4 5+\log_5 6>5$

34. Fie funcţia f:$[0,1]\to\mathbf{R}$, f(x)=$a^x b^{1-x}+a^{1-x}b^x$, unde $a,b>0,\neq 1$.

a. Să se arate că f este descrescătoare pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$şi crescătoare pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

b. Să se arate că pentru orice x$\in$ [0,1] avem $2\sqrt{ab}\leq a\left(\frac{b}{a}\right)^x+b\left(\frac{a}{b}\right)^x\leq a+b$.

35. Fie funcţia f(x)=$\log_a\left\lfloor(5m+1)x^2+(7m+3)x+3m\right\rfloor$, unde a>0, $\neq 1$, $m\in\mathbf{R}$.Să se determine m, astfel ca domeniul de definiţie al funcţiei f să fie **R**. Să se determine minimul sau maximul lui f(x).

36.a. Se dă $\log_{108} N = a$ şi $\log_{72} N = b$, $N>0, \neq 1$. Să se exprime $\log_2 N$ şi $\log_3 N$ în funcţie de *a* şi *b*.

b. Să se arate că $\frac{1}{\log_{x^n y^m} A} = \frac{n}{\log_x A} + \frac{m}{\log_y A}$, unde *A*>0, *x*,*y*>0, iar *m*,*n*$\in$ **R** $- \{0\}$, $A \neq 1$.

37. Fie $a > 1$. Să se arate că $a^{x^2} + a^{y^2} = 2 \cdot a^{xy}$ dacă şi numai dacă $x = y$.

38.Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = 2$.

39.Să se arate că funcţia $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_3 x + \log_x 3$ are un minim. Să se arate că $\log_3 x + \log_x 3 \geq 2$, oricare ar fi $x \in (1, \infty)$.

40.a). Să se arate că: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, a, b, c > 0, c \neq 1$.

b). Să se rezolve ecuaţia: $x^{\log_3 (x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} = 3x^2$.

41.a). Să se arate că dacă $1 < a < b$ şi $N > 1$, atunci $\log_a N > \log_b N$.

b). Ţinând seama de rezultatul de la punctul **a.** şi inegalitatea $\frac{x+3}{x} > \frac{x+4}{x+1}, \forall x > 0$ să se arate că dacă $a = \log_x (x+3)$ şi $b = \log_{x+1} (x+4)$ şi $x > 1$, atunci $a > b$.

42.Să se demonstreze inegalitatea $\frac{\ln(a_1 \cdot a_2 ......a_{n-1})}{\ln a_n} \geq \frac{n-2}{2}$, unde $a_1, ..., a_n$ sunt termenii unei progresii aritmetice cu raţia a_1, dacă $\ln a_1$ este cea mai mare valoare a funcţiei $f(x, y) = 8y(x+1) - 5(x^2 + 1) - 2(3x + 2y^2)$.

43.Să se rezolve ecuaţia $\log_{\sqrt{2x}} \log_{2\sqrt{2}} x \log_4 x = 54$.

$$\ln e = 1$$

O1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y \geq 1 \end{cases}$$

Rezolvare:

Condiţii de existenţă: x,y$\in$ $\mathbf{R}^*_+$

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} y = 2 - \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} y \geq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x\left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right) \geq 1 \Rightarrow 2\log_{\frac{1}{2}} x - \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 1 \geq 0$$

Ecuaţia ataşată: $-\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{-2}{-2} = 1$

$\log_{\frac{1}{2}} x$	**1**

$-\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x - 1$ | - - - - - - - - **0** - - - - - -

$$-\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x - 1 \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

Deci $x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{3}$

O2 Să se găsească valorile lui x astfel încât:

$$\log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \ldots + \log_n(x+1) + n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \ldots\left(\frac{1}{n}\right)^x$$

Răspuns:

Se observă că **x=0** este soluţie

$$\underbrace{\log_2(x+1)}_{0} + \underbrace{\log_3(x+1)}_{0} + \ldots + \underbrace{\log_n(x+1)}_{0} + n - 1 = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n-1 ori} \Rightarrow n-1 = n-1 (A)$$

Se consideră $f(x) = \log_2(x+1) + \log_3(x+1) + \ldots + \log_n(x+1) + n - 1$ şi

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \ldots\left(\frac{1}{n}\right)^x$$

f(x) este strict crescătoare pe **R**
g(x) este strict descrescătoare pe **R**
$\Rightarrow$ **x=0** este soluţie unică a ecuaţiei

O4 Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 y = 2 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$$

Rezolvare:
Condiţii de existenţă: x,y$\in$ $\mathbf{R}^*_+$

Observăm că $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ este soluţie a sistemului

Verificare:

$\log_3 x + \log_2 y = 1 + 1 = 2$

$3^3 - 2^2 = 27 - 4 = 23$

Cazul 1 x∈ (0;3)

$$\begin{cases} \log_3 x < 1 \\ \log_3 + \log_2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \log_2 y > 1 \Rightarrow \log_2 y > 2^2 \Rightarrow y > 2(1)$$

$$\begin{cases} 3^x < 27 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases} \Rightarrow 2^y < 4 \Rightarrow y < 2(2)$$

Din relaţiile (1) şi (2)→contradicţie→nu există soluţii pentru **x∈ (0;3) (3)**

Cazul 2 x∈ (3;+∞)

$$\begin{cases} \log_3 x > 1 \\ \log_3 x + \log_2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \log_2 y < 1 \Rightarrow \log_2 y < 2^2 \Rightarrow y < 2(1)$$

$$\begin{cases} 3^x > 27 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases} \Rightarrow 2^y > 4 \Rightarrow y > 2(2)$$

Din relaţiile (1) şi (2)→contradicţie→nu există soluţii pentru **x∈ (3;+∞) (4)**

Din relaţiile (3) şi (4)→ecuaţia are soluţie unică $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

N1 Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x) > 0$

Rezolvare:

Condiţii de existenţă: $x^2+2x>0 \to x(x+2)=0$

Ecuaţia ataşată: $x(x+2)=0 \to$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

x	-2	0
x(x-2)	+ + +0- - - - - - -	0+ + + +

Deci x∈ (-∞;-2) Y (0;+ ∞).

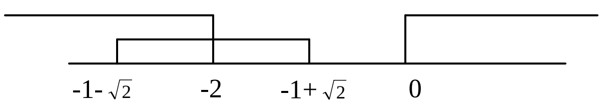
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x) > 0 \\ \frac{1}{2} \in (0;1) \end{cases} \Rightarrow x^2+2x<1 \Rightarrow x^2+2x-1<0$$

Ecuaţia ataşată: $x^2+2x-1=0 \rightarrow \Delta=4+4=8$.

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1+\sqrt{2} \\ x_2 = -1-\sqrt{2} \end{cases}$$

x		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	
x^2+2x-1	+	0	- - - - - - - -	0	+ + +

Deci x∈ **(**$-1-\sqrt{2}$;$-1+\sqrt{2}$)



Deci x∈ ($-1-\sqrt{2}$;-2).

c) $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < 1 \Leftrightarrow \log_x \frac{4x+5}{6-5x} < \log_x x$

Rezolvare:

Condiţii de existenţă:

$\frac{4x+5}{6-5x} > 0 \Rightarrow 4x > -5 \Rightarrow x > -\frac{5}{4}$

caz 1 x>1$\rightarrow \frac{4x+5}{6-5x} < x \Rightarrow 4x+5 < 6x-5x^2 \Rightarrow 4x+5-6x+5x^2 < 0 \Rightarrow 5x^2-2x+5<0$

Ecuaţia ataşată: $5x^2-2x+5=0$

Δ=4-4·4·5<0→**inecuaţia nu are soluţii**

caz 2 x∈ (0;1)→$\frac{4x+5}{6-5x} > x \Rightarrow 4x+5 > 6x-5x^2 \Rightarrow 5x^2-2x+5>0$

Deci inecuaţia nu are soluţii.

A1 Să se arate că expresia $E = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt[3]{z}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{y} + \log_3 \sqrt[3]{z}}$ **este independentă de valorile strict mai mari ca 1 ale variabilelor x,y,z.**

Rezolvare:

$\ln e = 1$

$$E = \frac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} + \log_2 \sqrt[3]{z}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{y} + \log_3 \sqrt[3]{z}} = \left.\frac{\log_2 (x\sqrt{y}\sqrt[3]{z})}{\log_3 (x\sqrt{y}\sqrt[3]{z})}\right\} \rightarrow$$

$$E = \frac{\log_2 t}{\log_3 t} = \frac{\log_2 t}{\frac{\log_2 t}{\log_2 3}} = \log_2 t \frac{\log_2 3}{\log_2 x} = \log_2 3 \rightarrow$$

Notăm $x\sqrt{y}\sqrt[3]{z} = t$

→ **E este independentă de valorile x,y,z>1.**