INFINITUL MARE, MIC ŞI UNITATEA.

Referat de Wagner Emil, inginer pensionar

Limitele funcţiilor sunt o problemă spinoasă pentru liceeni deoarece, la nivelul lor de percepţie, sunt definite şi se rezolvă folosind tot limite. Deci un cerc vicios din care foarte puţin au capacitatea de a ieşii.
Prin introducerea noţiunii de „**infinit mic**" care anticipează noţiunea de diferenţială studiată ulterior, cercul vicios dispare prin folosirea unui nou aparat de calcul al limitelor, neglijarea termenilor cu viteză de creştere mică.
Referatul familiarizează cititorul cu aşa numita „problemă a lui Achile cel iute de picior, care deşi poate întrece in alergare o broască ţestoasă nu o poate însă ajunge din urmă.

Wikipedia, enciclopedia liberă, defineşte **infinitul** matematic astfel:

*„Cuvântul **infinit** provine de la lat. infinitas care înseamnă "nemărginit". Se referă la mai multe concepte distincte, de obicei legate de ideea de "fără sfârşit" sau "mai mare decât cel mai mare lucru la care te poţi gândi", care apar în filozofie, matematică, teologie, dar şi în viaţa cotidiană. În matematică, infinitul este deseori folosit ca număr (de ex. el numără sau măsoară lucruri). Infinitul este relevant în legătură cu limite matematice, şi altele În mod neaşteptat s-a putut dovedi că, luate după bogăţia lor de membri (cardinalitate), există mai multe feluri de mulţimi infinite."*

La ce se referă *„**feluri de mulţimi infinite**" explicitate mai sus?*

Infinitul se notează cu simbolul ∞ ***şi, în cazul mulţimii*** $\mathbb{N}$ (a numerelor natur*ale, considerată a fi cea mai puţin potentă adică având cele mai puţine elemente)* ***are cardinalitatea (numărul de elemente)*** $\aleph_0$, care se citeşte **alef-zero**, $\aleph$(alef) fiind prima literă din alfabetul ebraic. $\aleph_0$ este *cel mai mare număr pe care ni-l putem imagina*. ***Atenţie!*** Mulţimea numerelor prime, a numerelor pare sau a numerelor divizibile prin 5, toate submulţimi ale mulţimii $\mathbb{N}$ ***au tot potenţa*** $\aleph_0$, deşi ar pare evident ca numărul de elemente este mai mic**. Mulţimi teoretic mai potente (cu mai mulţi termeni) cum ar fi mulţimea** $\mathbb{Z}$ **(a numerelor întregi) care are în plus faţă de *mulţimea*** $\mathbb{N}$ **ramura negativă, are tot cardinalitatea** $\aleph_0$.

Numărul de puncte ale unei drepte este o mulţime mai potentă deoarece apare ca un infinit de infinite. Intr-adevăr putem aşterne pe o dreaptă, fără suprapuneri, o infinitate de segmente mai mici sau mai mari având fiecare în parte câte o infinitate de puncte. O mulţime de acest tip este numită matematic **"de puterea continuului"** şi are cardinalitatea $\mathfrak{c}$ (C gotic) mai mare ca $\aleph_0$

O mulţime mai potentă decât $\mathfrak{c}$ poate fi de exemplu mulţimea tuturor funcţiilor care se pot defini pe o mulţime de potenţă $\mathfrak{c}$. Această potenţă se notează cu $\mathfrak{f}$**(**f gotic**).**

Cu definiţiile de mai sus putem stabili relaţiile:

- $K*\aleph_0 = \aleph_0$ Suma oricâtor mulţimi de aceeaşi potenţă nu schimbă potentă.
- $\aleph_0*\aleph_0=\mathfrak{c}$ Produsul (funcţia de funcţie) a 2 mulţimi ridică potenţa

Se pot astfel imagina o infinitate de mulţimi infinite din ce în ce mai potente.

Să nu confundăm cardinalitatea unei mulţimi cu limita spre care tinde ultimul ei element. Cardinalitatea reprezintă numărul de elemente ale mulţimii pe când fiecare element în parte poate fi exprimat de o constantă sau funcţiune oarecare. De regulă determinăm valoarea spre care tind elementele unei mulţimi calculând limita pentru valori foarte mari ale variabilei. Nimeni nu poate afirma că această limită trebuie să fie infinită. Ea poate fi şi nulă, determinată sau nedeterminată. În calculul limitei, în afară de operandul afectat variabilei, un definitoriu rol poate fi deţinut de valoarea unor constante.

De exemplu:

K^x (K la puterea x) pentru un X foarte mare are 4 valori diferite, şi anume:

Pentru K>1 **K^x** = ∞
K=1 **K^x** = 1
K<1 **K^x** = 0
K<0 **K^x** = nedeterminare deoarece ia valoarea ∞ ***pentru x par respectiv*** **-∞** ***pentru x impar***

Valoarea 1 (unitatea) apare aici ca şi valoarea 0 cu proprietăţi singulare.

Cu 0 suntem lămuriţi. El desparte numerele pozitive de cele negative. Vom avea ocazia de a mai reveni asupra elementului 0 din mulţimi. Ce semnificaţie poate avea însă unitatea?

Însăşi expresiile larg folosite **supraunitar** respectiv **subunitar** dau o semnificaţie aparte acestui punct. Aceste sintagme apar de obicei la fracţii ordinare şi exprimă mărimea numărătorului faţă de numitor.

Toate fracţiile care au numărătorul mai mare decât numitorul se plasează pe axă în dreapta unităţii pe când cele cu numitor mai mare în stânga, rămânând în domeniul pozitiv.

În mulţimile $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale şi $\mathbb{R}$ a *numerelor reale* putem crea câte 2 submulţimi respectiv **A** care conţine toate elementele mai mari decât 0 dar mai mici decât 1 şi B care conţine elementele mai mari decât 1
A şi B au cardinalităţi egale deoarece fiecare element din A are un element univoc în B egal cu inversul său. Putem defini deci unitatea drept mijlocul mulţimii elementelor pozitive din $\mathbb{R}$

Să reluăm studierea elementul 0. El face parte din toate mulţimile amintite mai sus deci este număr natural deşi are semnificaţia mulţimii vide deci de **„nimic”**

Din constatarea că unitatea este jumătatea unei mulţimi infinite rezultă că ne putem apropia de 0 la fel cum ne putem apropia de infinit, adică fără a-l putea atinge. Dacă la infinit această afirmaţie este de la sine de înţeles, deoarece poate exista oricând un număr mai mare cuprins în noţiunea de infinit, cu 0 nu pare atât de evident în aceea că ar fi posibil un element mai mic şi totuşi mai mare ca 0.

Ne-am obişnuit cu 0 număr şi putem cu greu să admitem 0 drept limita unei mulţimi infinite.

Între 0 şi ∞ există o relaţie care este şi totuşi nu este biunivocă,

Prin definiţie N/0 = ∞ în sensul că ori ce număr divizat prin 0 rezultă infinit.
Reciproca este adevărată deci N/∞ = 0 în sensul că ori ce număr divizat prin infinit rezultă 0
Dar 0*∞ nu trebuie să rezulte N ci este un caz de nedeterminare

Un capitol întreg din matematică ce precede calculul diferenţial (deoarece elementul principal al calculului diferenţial este **derivata**, o limită) se ocupă de **LIMITE** adică de valoarea ultimului element al unei mulţimi create de variabila unei funcţii.

Similitudinea între aprecierea mulţimii vide (deci numărul 0) ca invers al infinitului mă îndreptăţeşte să definesc o nouă noţiune **infinitul mic.** Nimic nu-i nou sub soare. Geometria diferenţială lucrează curent cu infiniţi mici pe care î-i numeşte diferenţiale şi au notaţia **dx, dy** respectiv **dz.** Dar la studierea limitelor, liceanul încă nu a făcut cunoştinţă cu diferenţialele aşa că pot apare mari dificultăţi, de regulă învăţarea matematicii ca pe o poezie ceea ce este, după a mea părere un defect crucial. Matematica trebuie înţeleasă nu învăţată papagaliceşte. X + Y nu fac întotdeauna 3 !!!

Deci, ce este un infinit mic şi cu ce se mănâncă?

Geometria defineşte **punctul** drept intersecţia a 2 drepte. Punctul este atât de mic încât un segment de dreaptă, oricât de mic ar fi, conţine o infinitate de puncte. Un punct are o dimensiune, chiar dacă „încă" nu avem instrumentul cu care să-l măsurăm şi nici unitatea de măsură în care să-i exprimăm mărimea. **Există deci un punct** al cărui dimensiune este un **„infinit mic"**, diferit de **0**.

Indiferent dacă, în cadrul unei mulţimi generate de o funcţie oarecare mă apropii de infinit sau de 0 variabila independentă a funcţiei creşte/scade cu un infinit mic la fiecare pas. Deci diferenţa între valoarea consecutivă a elementelor mulţimii de valori ale funcţiei este un infinit mic, un punct adăugat variabilii independente. Diferenţa între tendinţa spre infinit sau 0 este deci semnul infinitului mic.

Un infinit mic este cert subunitar precum un infinit mare este supraunitar.

Luând în considerare că puterile succesive ale unei valori subunitare sunt din ce în ce mai mici influenţa asupra valorii funcţiei devine mai mică cu cât creşte puterea variabilei independente. Exact invers se petrec fenomenele în cazul tinderii variabilei independente spre valori mari, puterile mai mici pot fi neglijate în favoarea celei mai mari. Putem deci defini o „viteză de creştere (descreştere) a funcţiei, în general dictată de puterea la care este ridicată variabila independentă. Astfel pătratul lui X creşte mult mai repede decât X la valori supraunitare (deci mari) pe când acelaşi pătrat descreşte mult mai repede decât X pentru valori subunitare (deci apropiate de 0).

La un polinom oarecare (o suită de puteri ale variabilei independente X), funcţia pe care o reprezintă poate fi asimilată, la calculul limitei, identic cu termenul celei mai mari puteri în cazul creşterii nemărginite a variabilei, respectiv cu termenul celei mai mici puteri în cazul descreşterii spre 0 a variabilei.

ATENŢIE! Noţiunea de **termen** cuprinde şi coeficientul ce multiplică puterea respectivă a variabilei şi chiar şi semnul lui algebric. Această precizare devine esenţială când funcţia este reprezentată drept o fracţie având la numărător şi numitor polinoame.

Deci, pentru absolut toate funcţiile polinomiale inclusiv a fracţiilor rezultate din polinoame limitele pentru valori mari sau mici ale variabilei se calculează simplu prin neglijarea termenilor care au viteza de creştere/descreştere mai mică.

Având la dispoziţie un „aparat" care să-i înlesnească calcularea lesnicioasă a majorităţii limitelor liceanul se poate dedica înţelegerii şi asimilării noţiunii de „nedeterminare" şi aparatul folosit la ridicarea ei adică tot calculul diferenţial cu toate problemele pe care le ridică. Derivata este prin definiţie o limită şi, cu mici excepţii, foarte uşor de calculat dacă ai noţiunea infinitului mic fiindcă variabila tinde către 0.

Noţiunea de limită nu este de fapt nouă pentru el. Rezolvarea unei ecuaţii algebrice nu este altceva decât o problemă de limite privită însă din alt punct de vedere. Şi asimtotele studiate la reprezentarea grafică a funcţiilor pun problema de limite