ECUAŢII EXPONENŢIALE

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

Dacă membrii au aceeaşi bază ecuaţia este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = g(x)$ (egalăm exponenţii). Soluţiile acestei ecuaţii sunt soluţii ale ecuaţiei date.

2. $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1$

Dacă $b \leq 0$, ecuaţia nu are soluţie (întotdeauna exponenţiala ia numai valori strict pozitive). Dacă $b > 0$, **se logritmează** ambii membri într-o bază convenabilă.

3. $a_1^{f_1(x)} \cdot a_2^{f_2(x)} = b_1^{g_1(x)} \cdot b_2^{g_2(x)}$

Se logaritmează ambii membri ai ecuaţiei într-o bază convenabilă şi apoi se rezolvă ecuaţia astfel obţinută. Soluţiile acestei ecuaţii sunt soluţiile ecuaţiei date.

4. $c_1 a^{2f(x)} + c_2 a^{f(x)} + c_3 = 0, a > 0, a \neq 1$

Ecuaţiile de acest tip se rezolvă **prin substituţie**. Se notează $a^{f(x)} = y > 0$ şi se obţine ecuaţia de gradul al doilea în y cu soluţiile y_1, y_2.

5. $c_1 a^{f(x)} + c_2 b^{f(x)} + c_3 = 0,\ \ a, b > 0,\ \ a, b \neq 1,\ \ a \cdot b = 1$

Este o ecuaţii exponenţială în care figurează bazele *a, b* cu proprietatea că produsul lor este unu, $a \cdot b = 1$. De aici $b = \dfrac{1}{a}$ iar ecuaţia se scrie echivalent: $c_1 a^{f(x)} + \dfrac{c_3}{a^{f(x)}} + c_3 = 0$. Se notează $a^{f(x)} = y > 0$ şi se obţine ecuaţia de gradul doi în y: $c_1 y^2 + c_3 y + c_2 = 0$ cu soluţiile y_1, y_2. **Se revine la substituţie** şi se rezolvă ecuaţiile $a^{f(x)} = y_i,\ i = \overline{1,2}$. Reuniunea acestor soluţii este mulţimea soluţiilor ecuaţiei date.

6. $c_1 a^{f_1(x)} + ... + c_k a^{f_k(x)} = d_1 b^{g_1(x)} + ... + d_l b^{g_1(x)},\ \ a, b > 0,\ \ a, b \neq 1$

În ecuaţiile exponenţiale care conţin exponenţiale cu baze diferite $a \neq b$, este indicat să **grupăm într-un membru termenii care conţin exponenţiale de aceeaşi bază** *a*, iar în celălalt membru termenii care au în componenţa lor exponenţiale de aceeaşi bază *b*. În fiecare membru se dă factor comun exponenţiala de exponent cel mai mic, ajungându-se la o ecuaţie exponenţială mai simplă.

7. $c_1 \cdot a_1^{2f(x)} + c_2 \cdot a_2^{2f(x)} + c_3 (a_1 \cdot a_2)^{f(x)} = 0,\ \ a_i > 0,\ \ a_i \neq 1$

O ecuaţie de acest tip o numim **omogenă** deoarece fiecare termen al ecuaţiei în a_1 şi a_2, are exponentul acelaşi *2f(x)*. Pentru a rezolva o astfel de ecuaţie se recomandă împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei prin $a_2^{2f(x)}$ când se obţine ecuaţia echivalentă $c_1 \left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{2f(x)} + c_3 \left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{f(x)} + c_2 = 0$ care este de tipul 4. Sau se poate împărţi ecuaţia prin $(a_1 a_2)^{f(x)}$ când obţinem: $c_1 \left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{f(x)} + c_2 \left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^{f(x)} + c_3 = 0$, care este o ecuaţie de tipul 5.

8. $A(a^{2x} + a^{-2x}) + B(a^x + a^{-x}) + C = 0,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ A, B, C \in$ ˇ . În acest caz se notează $a^x + a^{-x} = y$ unde prin ridicare la pătrat rezultă $a^{2x} + a^{-2x} = y^2 - 2$ atunci ecuaţia se scrie: $Ay^2 + By + C - 2A = 0$ cu soluţiile y_1, y_2.

9. $A(a^{3x} + a^{-3x}) + B(a^x + a^{-x}) + C = 0,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ A, B, C \in$ ˇ . Şi în acreastă situaţie punem $a^x + a^{-x} = y \geq 2$. De aici prin ridicare la pătrat rezultă că: $a^{3x} + a^{-3x} = y^3 - 3y$, etc.

10. **Ecuaţii exponenţiale cu soluţie unică.** Rezolvarea acestora constă în a le aduce la forma $f(x) = c$, unde f este o funcţie strict monotonă, iar c este o constantă şi observând că ecuaţia are o soluţie x_0.

11. **Ecuaţii exponenţiale cu parametru.** <u>Exemplu:</u> Să se determine $m \in$ ˇ a.î. $4^x - m \cdot 2^x - m + 3 = 0$ are o singură soluţie. <u>Soluţie(ex):</u> Notând $2^x = y > 0$, ecuaţia devine $y^2 - my - m + 3 = 0$. Ecuaţia dată are o singură soluţie dacă şi numai dacă ecuaţia în y are o singură rădăcină pozitivă. Condiţiile care se impun sunt: ($\Delta > 0$ şi $P = y_1 y_2 = -m + 3 < 0$) sau ($\Delta = 0$ şi $S = y_1 + y_2 = m > 0$).

$$\begin{cases} (m-2)(m+6) > 0 \\ 3 - m < 0 \end{cases} \text{ U } \begin{cases} (m-2)(m+6) = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{2\} \text{ U } (3, \infty)$$