Calculul iterativ al radicalilor

În cele ce urmează vom aborda următoarele teme:

1. Calculul iterativ al lui $\sqrt[5]{a}$ când $0 < a < 1$.
2. Calculul iterativ al lui $\sqrt[N]{a}$ când $0 < a < 1$.

Tema 2.este o generalizare naturală a temei 1 pentru orice N>1.

1.Calculul iterativ al lui $\sqrt[5]{a}$ când $0 < a < 1$

De unde vine ideea ? Pentru aceasta facem câteva consideraţii geometrice :

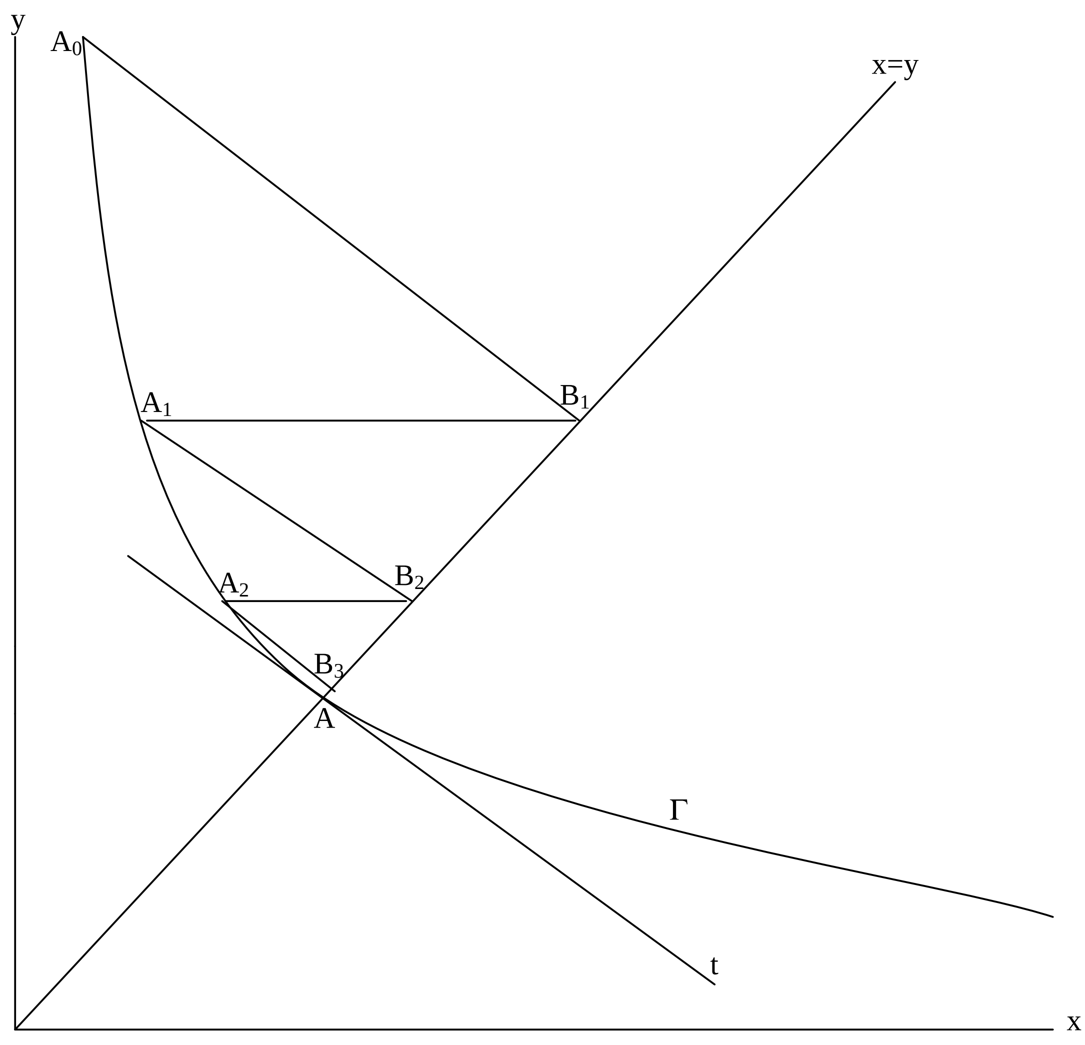

figura 1

În figura1 curba Γ are ecuaţia $x \cdot y^4 = x_0 \cdot y_0^4$ unde x_0 şi y_0 sunt coordonatele punctului A_0.Intersecţia curbei Γ cu dreapta de ecuaţie x=y este punctul A .Tangenta în A la Γ este dreapta notată cu t .De reţinut faptul că $0 < x_0 < y_0$.

Pornind de la A_0 se construieşte şirul de puncte A_1 ,A_2 ,A_3, …,A_n,…în felul următor :
-paralela prin A_i la tangenta t intersectează dreapta x=y în punctul B_{i+1}
-paralela prin B_{i+1}la axa ox intersectează curba Γ în punctul următor A_{i+1}

Astfel fiind dat punctul A_0, paralela prin A_0 la tangenta t intersectează dreapta x=y în punctul B_1, iar paralela prin B_1la axa ox intersectează curba Γ în punctul următor A_1 ;
paralela prin A_1 la tangenta t intersectează dreapta x=y în punctul B_2 iar paralela prin B_2 la axa ox intersectează curba Γ în punctul următor A_2 ;şi aşa mai departe…

Intuitiv , deoarece dreptele A_iB_{i+1} sunt paralele cu tangenta t , şirul de puncte A_1 ,A_2 ,A_3, …,A_n,…este convergent la A.

Aceasta implică şi convergenţa pe coordonate.

Deoarece A aparţine dreptei de ecuaţie x=y avem că $A(\lambda, \lambda)$
Deoarece A aparţine curbei Γ rezultă $\lambda \cdot \lambda^4 = x_0 \cdot y_0^4$; alegem $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ cu $0 < a < 1$, de unde rezultă că $\lambda = \sqrt[5]{a}$.

Deoarece $A_n(x_n, y_n)$ este un şir de puncte convergent la $A(\lambda, \lambda)$ rezultă că şirurile x_n şi y_n sunt convergente la $\lambda = \sqrt[5]{a}$.

Cum calculăm termenii şirurilor x_n şi y_n ?
*Ecuaţia dreptei A_0B_1 :
-mai întâi calculăm panta tangentei t care este şi panta dreptei A_0B_1 :

$$\frac{d}{dx}(xy^4 - x_0y_0^4) = 0 \Leftrightarrow y^4 + 4xy^3\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4x} \Rightarrow \text{daca } y = x \text{ atunci} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$$

-ecuaţia dreptei A_0B_1 este $y = -\frac{1}{4}x + c \Leftrightarrow x + 4y = 4c$;
-deoarece A_0 aparţine dreptei A_0B_1 putem calcula constanta 4c cu formula $x_0 + 4y_0 = 4c$;

-în final ecuaţia dreptei A_0B_1 este $x + 4y = x_0 + 4y_0$
*Coordonatele lui B_1:
-deoarece $A_1$are coordonatele (x_1, y_1) şi $A_1B_1 \parallel$ ox rezultă că $B_1$are coordonatele $B_1(y_1, y_1)$.
-deoarece $B_1(y_1, y_1)$ aparţine dreptei A_0B_1 rezultă $y_1 + 4y_1 = x_0 + 4y_0$ adică $y_1 = \frac{x_0 + 4y_0}{5}$.
*Coordonatele lui A_1:
Avem $A_1(x_1, y_1)$ şi $y_1 = \frac{x_0 + 4y_0}{5}$. Deoarece $A_1(x_1, y_1) \in \Gamma$ rezultă $x_1 \cdot y_1^4 = x_0 \cdot y_0^4$;
de aici rezultă $x_1 = \frac{x_0y_0^4}{y_1^4} = \frac{625x_0y_0^4}{(x_0 + 4y_0)^4}$.

*Fiind dat $A_n(x_n, y_n)$ se pot calcula ca mai sus coordonatele lui $A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ cu formulele

$$x_{n+1} = \frac{625x_n y_n^4}{(x_n + 4y_n)^4} \text{ şi } y_{n+1} = \frac{x_n + 4y_n}{5}$$

(în locul lui A_0 punem punctul A_n şi în locul lui A_1 punem punctul A_{n+1}).

*Să ne amintim însă că $A_n(x_n, y_n) \to A(\lambda, \lambda)$
(unde $\lambda = \sqrt[5]{a}$ dacă alegem $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ şi $0 < a < 1$).
De aceea toate aceste consideraţii intuitive ne conduc la formularea următoarei teoreme:

TEOREMĂ

Fie funcţiile $f(x; y) = \frac{625xy^4}{(x+4y)^4}$ şi $g(x; y) = \frac{x+4y}{5}$ definite pe domeniul $D = \{(x; y) | 0 < x \le y\}$ şi fie numerele $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ cu proprietatea $0 < a < 1$.
Atunci şirurile $x_{n+1} = f(x_n; y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n; y_n)$ sunt convergente la $\lambda = \sqrt[5]{a}$.
Demonstraţie :

Pentru a demonstra teorema avem nevoie de câteva rezultate preliminare :

Propoziţia 1. Dacă 0<x<y atunci $x < f(x; y) < g(x; y) < y$
Demonstraţie :
a)

$$x < y \Leftrightarrow x + 4y < 5y \Leftrightarrow (x+4y)^4 < 625y^4 \Leftrightarrow 1 < \frac{625y^4}{(x+4y)^4} \Leftrightarrow x < \frac{625xy^4}{(x+4y)^4} \Leftrightarrow x < f(x; y)$$

b) $x < y \Leftrightarrow x + 4y < 5y \Leftrightarrow \frac{x+4y}{5} < y \Leftrightarrow g(x; y) < y$

c) $f(x; y) < g(x; y) \Leftrightarrow \frac{625xy^4}{(x+4y)^4} < \frac{x+4y}{5} \Leftrightarrow 5^5 xy^4 < (x+4y)^5 \Leftrightarrow \sqrt[5]{xy^4} < \frac{x+4y}{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{xyyyy} < \frac{x+y+y+y+y}{5}$$

Ultima inegalitate este adevărată pe baza inegalităţii dintre media aritmetică şi media geometrică a 5 numere.

Propoziţia 2. Dacă $x = f(x; y)$ sau daca $g(x; y) = y$ atunci x=y.
Demonstraţie :

a) $x = f(x; y) \Leftrightarrow x = \frac{625xy^4}{(x+4y)^4} \Leftrightarrow (5y)^4 = (x+4y)^4 \Leftrightarrow 5y = x + 4y \Leftrightarrow y = x$

b) $g(x; y) = y \Leftrightarrow \frac{x+4y}{5} = y \Leftrightarrow x + 4y = 5y \Leftrightarrow x = y$

Consecinţe :
a) Dacă în Propoziţia1. punem $x = x_n$ si $y = y_n$ obţinem
$x_n < f(x_n; y_n) < g(x_n; y_n) < y_n$ adică $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$;
În ultimele inegalităţi dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :
$x_0 < x_1 < x_2 < K < x_n < K < y_n < K < y_2 < y_1 < y_0$

Ultimele inegalităţi ne arată că şirurile $x_{n+1} = f(x_n; y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n; y_n)$ sunt convergente deoarece sunt monotone şi mărginite;să notăm $\mu = \lim x_n$ şi $\eta = \lim y_n$

b) Dacă în $x_{n+1} = f(x_n; y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n; y_n)$ trecem la limită obţinem
$\mu = f(\mu; \eta)$ şi $g(\mu; \eta) = \eta$ (am folosit aici continuitatea funcţiilor f şi g)
Aplicând Propoziţia 2. rezultă că $\mu = \eta$ .Să notăm cu λ valoarea comună a celor două limite.
Mai avem de arătat că $\lambda = \sqrt[5]{a}$; atunci teorema va fi demonstrată complet.

Propoziţia 3. Fie funcţia $\Psi(x; y) = \sqrt[5]{xy^4}$ .Atunci:
a) $\Psi(x; y) = \Psi(f(x; y); g(x; y))$
b) $\Psi(x; x) = x$
Demonstraţie:

a) $\Psi(f(x; y); g(x; y)) = \sqrt[5]{f(x; y) \cdot (g(x; y))^4} = \sqrt[5]{\frac{625xy^4}{(x+4y)^4} \cdot \left(\frac{x+4y}{5}\right)^4} = \sqrt[5]{xy^4} = \Psi(x; y)$

b) $\Psi(x; x) = \sqrt[5]{x \cdot x^4} = \sqrt[5]{x^5} = x$
Consecinţe:
$\Psi(x_n; y_n) = \Psi(f(x_n; y_n); g(x_n; y_n)) = \Psi(x_{n+1}; y_{n+1})$;
-Dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :
$\Psi(x_0; y_0) = \Psi(x_1; y_1) = \ldots = \Psi(x_n; y_n)$.
-Trecem la limită în ultimul şir de egalităţi şi ţinem seama de faptul că funcţia Ψ este continuă; obţinem că :
$\Psi(x_0; y_0) = \Psi(x_1; y_1) = \ldots = \lim \Psi(x_n; y_n) = \Psi(\lim x_n; \lim y_n) = \Psi(\lambda; \lambda) = \lambda$
adică $\lambda = \Psi(x_0; y_0)$
-Alegem $x_0 = a$, $y_0 = 1$ cu 0<a<1;obţinem:
$\lambda = \Psi(x_0; y_0) = \sqrt[5]{x_0 y_0^4} = \sqrt[5]{a \cdot 1^4} = \sqrt[5]{a}$
Cu aceasta **demonstraţia teoremei este încheiată**.

EXEMPLU : calculăm primele patru iteraţii pentru $\sqrt[5]{0,3}$:

$$\begin{cases} x_1 = 0,548437888 \\ y_1 = 0,86 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 0,740951769 \\ y_2 = 0,797687577 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_3 = 0,78465521 \\ y_3 = 0,786340415 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = 0,786001927 \\ y_4 = 0,786003374 \end{cases}$$

-în calcule am pornit cu valorile $x_0 = 0,3$ şi $y_0 = 1$
-observăm că $\sqrt[5]{0,3} = 0,78600\ldots$ unde cu siguranţă primele 5 zecimale sunt exacte deoarece $\sqrt[5]{0,3} - x_4 < y_4 - x_4 < 10^{-5}$
-în general putem evalua eroarea $\varepsilon = \sqrt[5]{a} - x_n < y_n - x_n$;deci odată cu evaluarea radicalului avem şi un control al erorii; despre eroarea ε putem afirma că este întotdeauna mai mică decât diferenţa $y_n - x_n$.

2. Calculul iterativ al lui $\sqrt[N]{a}$ când $0 < a < 1$

În cele ce urmează vom urmări în linii mari etapele parcurse în calculul lui $\sqrt[5]{a}$ pentru a da o metodă de calcul al lui $\sqrt[N]{a}$, N>1**.** Vom indica schimbările care apar în demonstraţii.

Consideraţii geometrice:

Ne vom raporta tot la figura 1., dar de data aceasta ecuaţia curbei Γ este $xy^{N-1} = x_0 y_0^{N-1}$.
Deoarece A aparţine dreptei de ecuaţie x=y avem că $A(\lambda, \lambda)$
Deoarece A aparţine curbei Γ rezultă $\lambda \cdot \lambda^{N-1} = x_0 \cdot y_0^{N-1}$; alegem $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ cu $0 < a < 1$, de unde rezultă că $\lambda = \sqrt[N]{a}$.

Deoarece $A_n(x_n, y_n)$ este un şir de puncte convergent la $A(\lambda, \lambda)$ rezultă că şirurile x_n şi y_n sunt convergente la $\lambda = \sqrt[N]{a}$ .Construcţia punctelor $A_n(x_n, y_n)$ este asemănătoare cu cea din cazul calculului lui $\sqrt[5]{a}$.

*Ecuaţia dreptei A_0B_1 :
$x + (N-1)y = x_0 + (N-1)y_0$

*Coordonatele lui B_1:
-deoarece A_1 are coordonatele (x_1, y_1) şi $A_1B_1 \| ox$ rezultă că B_1 are coordonatele $B_1(y_1, y_1)$.
-deoarece $B_1(y_1, y_1)$ aparţine dreptei A_0B_1 rezultă $y_1 + (N-1)y_1 = x_0 + (N-1)y_0$ adică
$$y_1 = \frac{x_0 + (N-1)y_0}{N}.$$
*Coordonatele lui A_1:
-deoarece $A_1(x_1, y_1) \in \Gamma$ rezultă
$$x_1 = \frac{N^{N-1} x_0 y_0^{N-1}}{(x_0 + (N-1)y_0)^{N-1}} \text{ şi } y_1 = \frac{x_0 + (N-1)y_0}{N} \qquad (*)$$
Ultimele două formule indică prima iteraţie în calculul valorilor celor două şiruri.

Înlocuind indicele “0”cu “n” şi indicele “1” cu “n+1”în formulele (*) obţinem formulele de recurenţă necesare calculului şirurilor x_n şi y_n .

Consideraţiile geometrice de mai sus conduc la formularea următoarei teoreme:

TEOREMĂ

Fie funcţiile $f(x;y) = \dfrac{N^{N-1} x y^{N-1}}{(x + (N-1)y)^{N-1}}$ şi $g(x;y) = \dfrac{x + (N-1)y}{N}$ definite pe domeniul $D = \{(x;y) | 0 < x \le y\}$ şi fie numerele $x_0 = a$ şi $y_0 = 1$ cu proprietatea $0 < a < 1$.
Atunci şirurile $x_{n+1} = f(x_n; y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n; y_n)$ sunt convergente la $\lambda = \sqrt[N]{a}$.
Demonstraţie :
Pentru a face demonstraţia avem nevoie de următoarele Propoziţii despre f şi g din teoremă :

Propoziţia 1. Dacă 0<x<y atunci $x < f(x;y) < g(x;y) < y$
Propoziţia 2. Dacă $x = f(x;y)$ sau daca $g(x;y) = y$ atunci x=y.
Propoziţia 3. Fie funcţia $\Psi(x;y) = \sqrt[N]{xy^{N-1}}$ .Atunci:
a) $\Psi(x;y) = \Psi(f(x;y);g(x;y))$
b) $\Psi(x;x) = x$
Demonstraţiile propoziţiilor urmează întru-totul cele din cazul N=5 ;de aceea le omitem.

*Consecinţa Propoziţiei 1:
Dacă în Propoziţia1. punem $x = x_n$ si $y = y_n$ obţinem
$x_n < f(x_n;y_n) < g(x_n;y_n) < y_n$ adică $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$;
În ultimele inegalităţi dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :
$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < \ldots < y_2 < y_1 < y_0$

Ultimele inegalităţi ne arată că şirurile $x_{n+1} = f(x_n;y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n;y_n)$ sunt convergente deoarece sunt monotone şi mărginite;să notăm $\mu = \lim x_n$ şi $\eta = \lim y_n$

*Consecinţa Propoziţiei 2:
Dacă în $x_{n+1} = f(x_n;y_n)$ şi $y_{n+1} = g(x_n;y_n)$ trecem la limită obţinem
$\mu = f(\mu;\eta)$ şi $g(\mu;\eta) = \eta$ (am folosit aici continuitatea funcţiilor f şi g)
Aplicând Propoziţia 2. rezultă că $\mu = \eta$ .Să notăm cu λ valoarea comună a celor două limite.

*Consecinţa Propoziţiei 3:
$\Psi(x_n;y_n) = \Psi(f(x_n;y_n);g(x_n;y_n)) = \Psi(x_{n+1};y_{n+1})$;
-Dăm valori lui n începând de la 0 şi obţinem :
$\Psi(x_0;y_0) = \Psi(x_1;y_1) = \ldots = \Psi(x_n;y_n)$.
-Trecem la limită în ultimul şir de egalităţi şi ţinem seama de faptul că funcţia Ψ este continuă; obţinem :
$\Psi(x_0;y_0) = \Psi(x_1;y_1) = \ldots = \lim \Psi(x_n;y_n) = \Psi(\lim x_n;\lim y_n) = \Psi(\lambda;\lambda) = \lambda$
adică $\lambda = \Psi(x_0;y_0)$
-Alegem $x_0 = a$, $y_0 = 1$ cu 0<a<1;obţinem:
$\lambda = \Psi(x_0;y_0) = \sqrt[N]{x_0 y_0^{N-1}} = \sqrt[N]{a \cdot 1^{N-1}} = \sqrt[N]{a}$
Cu aceasta **demonstraţia teoremei este încheiată**.
Observaţii:
1.Dacă N=2 calculăm cu formulele $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ şi $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ şi obţinem $\sqrt{a}$;
evident că pornim calculele cu $x_0 = a < 1 = y_0$.
2.Cum calculăm $\sqrt[N]{a}$ dacă a>1 ? Avem $0 < \frac{1}{a} < 1$;calculăm mai întâi $\nu = \sqrt[N]{\frac{1}{a}}$;atunci $\sqrt[N]{a} = \frac{1}{\nu}$

prof Velcsov Gheorghe

Bibliografie:
Privelişti matematice-Isaac J. Schoenberg
Editura Tehnică 1989