10. ÉQUATIONS NON-HOMOGÈNES : MÉTHODE DE LA VARIATION DES PARAMÈTRES

Cette méthode est plus générale que la méthode des coefficients indéterminés afin de trouver la solution particulière de l'équation non-homogène. La méthode des coefficients indéterminés était valide seulement lorsqu'on avait affaire à des équations linéaires à coefficients constants. La présente méthode s'appliquera également lorsque les coefficients sont **non-constants**.

L'idée consiste à partir des solutions de l'équation homogène $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour trouver $y_p(t)$ en appliquant la relation suivante :

$$y_p(t) = -y_1.\int \frac{y_2.g(t).dt}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} + y_2.\int \frac{y_1.g(t).dt}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}$$

EXEMPLE :

soit à résoudre : $y'' + y = \dfrac{1}{\cos t}$

SOLUTION :

1) Déterminer d'abord les solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ (i.e. trouver la solution homogène $y_h(t)$):

$$\left.\begin{matrix} y''+y=0 \\ r^2+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = +i \\ r_2 = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos t \\ y_2 = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_1 = -\sin t \\ y'_2 = \cos t \end{cases}$$

dès lors le Wronskien est :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

2) Appliquer la méthode pour trouver la solution particulière :

$$y_p(t) = -\cos t.\int \frac{\sin t.\frac{1}{\cos t}.dt}{1} + \sin t.\int \frac{\cos t.\frac{1}{\cos t}.dt}{1}$$

$$y_p(t) = \cos t.\ln|\cos t| + t.\sin t$$

3) Solution générale :

$$\boxed{y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left(A + \ln|\cos t|\right).\cos t + (B+t).\sin t}$$

10.1. Comment est-on parvenu à cette méthode ?

Ce serait Louis Lagrange[1] qui en avait eu l'idée. En effet, si la solution générale est :

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Alors en remplaçant les coefficients par des fonctions (méthode de la variation des paramètres), on obtient :

$$\begin{aligned} y_p(t) &= u_1(t).y_1(t) + u_2(t).y_2(t) \\ y'_p &= u'_1.y_1 + u_1.y'_1 + u'_2.y_2 + u_2.y'_2 \end{aligned}$$

Si on continuait de dériver ainsi pour obtenir y''_p, ce serait lourd. Or on doit remarquer que l'équation générale (non-homogène) n'impose qu'une seule condition sur le lien entre $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Alors que pour fixer $u_1(t)$ et $u_2(t)$, il faut une seconde condition (système de 2 équations à 2 inconnues u_1 et u_2). Dans le but de simplifier la recherche, on peut imposer que cette condition supplémentaire soit :

$$u'_1.y_1 + u'_2.y_2 = 0$$

Il s'ensuit que l'expression de la dérivée seconde est alors plus simple.

$$\begin{aligned} y_p &= u_1.y_1 + u_2.y_2 \\ y'_p &= u_1.y_1' + 0 + u_2.y'_2 \\ y''_p &= u'_1.y'_1 + u_1.y''_1 + u'_2.y'_2 + u_2.y''_2 \end{aligned}$$

Et en réinjectant dans l'équation générale :

$$(u'_1.y'_1 + u_1.y''_1 + u'_2.y'_2 + u_2.y''_2) + p(t).(u_1.y_1' + u_2.y'_2) + q(t).(u_1.y_1 + u_2.y_2) = g(t)$$

soit :

$$u_1.\underbrace{(y''_1 + p(t)y'_1 + q(t).y_1)}_{=0} + u_2.\underbrace{(y''_2 + p(t).y'_2 + q(t).y_2)}_{=0} + u'_1\, y_1' + u'_2.y_2' = g(t)$$

Nous avons donc un système de 2 équations à 2 inconnues u et v à résoudre :

$$\begin{cases} u'_1\, y'_1 + u'_2.y'_2 = g(t) \\ u'_1\, y_1 + u'_2.y_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

Et si les solutions y_1 et y_2 sont indépendantes, le Wronskien est non nul. Il est donc possible de fixer un couple unique de fonctions u'_1 et u'_2 :

[1] *Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) était né à Turin en Italie, d'une famille d'immigrants français. Il obtint son premier poste d'enseignant à l'académie militaire de Turin à l'âge de 19 ans. Il migra ensuite à l'Académie de Berlin pour occuper le poste de directeur de la section des mathématiques à l'âge de 40 ans, et finit son périple à Paris en 1787. Il nous a laissé une œuvre scientifique considérable: méthode des isopérimètres, calcul des variations, analyse basée sur l'emploi des développements en série de Taylor, théorie des approximations. Il intervint également dans la thérie des nombres, en algèbre, en mécanique des objets célestes. Il présida en 1790 à la commission chargée d'instaurer un système des poids et mesures demandée par l'Assemblée Constituante.*

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2.g(t)}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} \qquad \to \qquad u_1 = -\int \frac{y_2.g(t).dt}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{+y_1.g(t)}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2} \qquad \to \qquad u_2 = +\int \frac{y_1.g(t).dt}{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}$$

d'où la forme proposée de la solution :

$$y_p(t) = -y_1.\int \frac{y_2.g(t).dt}{W} + y_2.\int \frac{y_1.g(t).dt}{W}$$

REMARQUE IMPORTANTE :

La forme de la solution pour $y_p(t)$ décrite n'est valable qu'à la condition qu'on utilise toujours la forme canonique pour décrire $g(t)$. Si la forme de l'équation générale n'est pas dans la forme canonique avec $p(t)$, $q(t)$ et $g(t)$, il faut refaire toutes les démonstrations. Je laisse cet exercice à ceux d'entre-vous qui se destinent à être des grands mathématiciens.

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation non-homogène suivante : $t^2 y'' - 4ty' + 6y = \dfrac{1}{t^4}$

SOLUTION

1) Chercher la solution homogène:

Comme il s'agit d'une équation de type Euler-Cauchy : $(t^2)y'' + (at^1)y' + (bt^0)y = g(t)$, c'est à dire dont les coefficients sont **non-constants** et d'une forme polynomiale typique, nous pouvons poser $y = t^m$ pour ramener cette équation à une forme d'équation à coefficients **constants** comme suit :

$$\begin{aligned} y &= t^m \\ y' &= mt^{m-1} \\ y'' &= m(m-1)t^{m-2} \end{aligned}$$

L'équation se transforme en : $(t^2)m(m-1)t^{m-2} + (at)mt^{m-1} + (b)t^m = g(t)$

d'où l'équation homogène et son équation caractéristique associée :

$$\begin{aligned} &(t^2)m(m-1)t^{m-2} + (at)mt^{m-1} + (b)t^m = 0 \\ &\left[m^2 + (a-1)m + b\right]t^m = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + (a-1)m + b = 0 \end{aligned}$$

Les racines de cette équation caractéristique sont dans le cas présent :

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{-(-4-1)+\sqrt{(-4-1)^2-4\times 6\times 1}}{2} = 3 \\ m_2 = \dfrac{-(-4-1)-\sqrt{(-4-1)^2-4\times 6\times 1}}{2} = 2 \end{cases}$$

d'où la solution homogène (ici on est dans le cas de 2 racines réelles):

$$y_h(t) = c_1 t^{m_1} + c_2 t^{m_2} = c_1 t^3 + c_2 t^2$$

2) Recherche de la solution pingulière (par la méthode de variation des paramètres):

Puisqu'ici nous avons obtenu les 2 formes solutions $y_1(t) = t^3$ et $y_2(t) = t^2$, formons d'abord le Wronskien :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & t^2 \\ 3t^2 & 2t \end{vmatrix} = -t^4$$

Puis exprimons la solution particulière. Pour cette dernière il est important de savoir que l'expression développée dans la méthode correspond à la forme standard de l'équation. Puisqu'ici nous avons la forme d'Euler-Cauchy, soit nous la transformons pour la ramener à la forme standard :

$$y'' + \frac{a}{t} y' + \frac{b}{t^2} y = \frac{g(t)}{t^2}$$

Soit nous développons l'expression de la solution particulière à la forme d'Euler-Cauchy. Quoiqu'il en soit, la forme de la solution particulière sera :

$$y_p(t) = -y_1 . \int \frac{y_2 . g(t) . dt}{t^2 . W} + y_2 . \int \frac{y_1 . g(t) . dt}{t^2 . W}$$

Il y a donc un facteur supplémentaire t^2 au dénominateur. C'est-à-dire dans notre cas :

$$y_p(t) = -t^3 \int \frac{t^2 \left(\frac{1}{t^4}\right) dt}{t^2\left(-t^4\right)} + t^2 \int \frac{t^3 \left(\frac{1}{t^4}\right) dt}{t^2\left(-t^4\right)} = t^3 \int \frac{dt}{\left(t^8\right)} - t^2 \int \frac{dt}{\left(t^7\right)} = -t^3 \frac{t^{-7}}{7} + t^2 \frac{t^{-6}}{6}$$

3) D'où la solution générale :

$$\boxed{y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 t^3 + c_2 t^2 + \frac{t^{-4}}{42}}$$

EXERCICE GUIDE: ÉQUATION NON-HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Résoudre l'équation **non-homogène** avec **conditions initiales** suivant : $\begin{cases} y''+2y'+5y=e^{-t}\cos 2t \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

SOLUTION GUIDE:

1) Rechercher toujours et d'abord la solution homogène :

(équation homogène associée): $y''+(\qquad)y'+(\qquad)y=0$

(équation caractéristique associée): $r^2+(\qquad)r^1+(\qquad)r^0=0$

1-1) Trouver les racines caractéristiques :

$\begin{cases} r_1 = \\ \\ r_2 = \end{cases}$.

Il s'agit du cas $\begin{cases} \text{Cas 1: 2 racines réelles} \\ \text{Cas2 : 1 racine double} \\ \text{Cas 3: 2 racines complexes conjuguées.} \\ \text{Cas 4: 2 racines imaginaires pures.} \end{cases}$. (encercler le bon cas!)

1-2) Écrire la solution homogène correspondante :

$y_h(t) =$

2) Recherche de la forme singulière de solution (par la méthode de variation des paramètres):

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} (\qquad) & (\qquad) \\ (\qquad) & (\qquad) \end{vmatrix}$$

$$y_p(t) = -(\qquad).\int \frac{(\qquad)(\qquad)dt}{(\qquad)} + (\qquad).\int \frac{(\qquad)(\qquad)dt}{(\qquad)}$$

3) Exprimer la solution générale :

$$y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) =$$

4) Trouver la solution particulière :

4-1) Introduire les conditions initiales dans la solution générale et résoudre les coefficients :

$$\begin{cases} y_g(0) = \\ y'_g(0) = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad = \\ \qquad = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \\ C_2 = \end{cases}$$

$$\text{ou} \Rightarrow \begin{cases} A = \\ B = \end{cases}$$

4-2) Exprimer la solution spécifique :

$$y_s(t) =$$

Comparez ensuite avec le résultat suivant :

$$y_s(t) = e^{-t}\cos 2t + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}t\right)e^{-t}\sin 2t$$

Si c'est identique, alors tout est OK! Sinon, regardons si nous pouvons ramener votre solution à forme souhaitée ci-dessus!

EXERCICES

Trouver la solution générale pour les équations non-homogènes suivantes avec la méthode de variation des paramètres :

1. $y''+4y=3t^3$.

2. $y''-4y=e^{3t}$.

3. $y''+6y'+9y=18\cos 3t$.

4. $y''+6y'+9y=9\cosh 3t$.

5. $y''-y'-2y=e^t+t$.

6. $y''-2y'-2y=e^t\sin t$.

7. $y''+2y'+5y=5t^2+t$.

8. $(D^2+D-1)y=\cos 2t$.

9. $y''+4y=\dfrac{2}{\cos 2t}$.

10. $y''+6y'+9y=18\cos 3t$.

11. $y''+y=\dfrac{1}{\sin t}$.

12. $y''-4y'+5y=\dfrac{2e^{2t}}{\sin t}$.

13. $y''-4y'+4y=e^t(3t^2+2)$.

14. $y''+6y'+95y=\dfrac{8e^{-3t}}{t^2+1}$.

15. $(D^2+9)y=\dfrac{1}{\cos 3t}$.

16. $(D^2+2D+2)y=\dfrac{e^t}{\cos^3 t}$.

Trouver la solution particulière pour les équations non-homogènes suivantes avec conditions initiales, à partir de la méthode de variation des paramètres :

17. $\begin{cases}(D^2-D-2)y=3e^{2t}\\ y(0)=-1\\ y'(0)=1\end{cases}$.

18. $\begin{cases}(D^2-D-2)y=10\sin t\\ y(\frac{\pi}{2})=-3\\ y'(\pi)=-3\end{cases}$.

19. $\begin{cases}y''+y'-2y=-6\sin 2t-18\cos 2t\\ y(0)=-2\\ y'(0)=2\end{cases}$.

La plupart des problèmes sont les mêmes que pour la méthode des **coefficients indéterminés**, ce qui permet de juger de par vous-même la méthode qui est la plus commode pour vous, lorsqu'il s'agit d'équations à **coefficients constants**.

À présent voici des équations d'Euler-Cauchy non-homogènes, trouver la solution générale par la méthode de variation des paramètres (on vous conseille avant de vous tromper, de remettre l'équation dans la forme canonique de résolution, c'est à dire ramener le facteur de y'' à 1) :

20. $t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^4$

21. $4t^2 y'' + 4ty' - y = \dfrac{12}{t}$

22. $(t^2 D^2 - 4tD + 6)y = -7t^4 \sin t$

23. $(t^2 D^2 - D)y = e^t (t+3)$

24. $(t^2 D^2 - 2)y = 9t^2$

QUESTIONS & PROBLÈMES

25. Pourquoi dans cette méthode de variation des paramètres, on ne se préoccupe plus du tout de l'histoire de dégénérescence des solutions, alors que dans la méthode des coefficients indéterminés, il fallait parfois multiplier par t ou t^2 si on trouvait un tel terme dans la solution homogène?

26. Pourquoi a t'on introduit la résolution des équations d'Euler-Cauchy non-homogènes par la méthode de variation des paramètres alors qu'on ne l'a pas fait avec la méthode des coefficients indéterminés?

27. Qu'arrive-t-il si on ne remettait pas les équations d'Euler-Cauchy non homogènes sous la forme canonique, avant de résoudre pour trouver la solution singulière?

28. Développer votre propre formalisme pour résoudre l'équation d'Euler-Cauchy non-homogène dans la forme canonique suivante : $t^2 y'' + aty' + by = g(t)$.

EXERCICES DIRIGÉS

EXERCICE DIRIGÉ 1 :

Vérifier que les formes suivantes sont des solutions de l'équation homogène associée et trouver la solution particulière: $\begin{cases} ty''-(1+t)y'+y=t^2e^{2t} & \forall t>0 \\ y_1(t)=1+t \\ y_2(t)=e^t \end{cases}$.

SOLUTION :

Comme il s'agit d'une équation à coefficients non-constants d'une forme non reconnaissable comme l'équation d'Euler-Cauchy, il n'y a pas de méthode toute indiquée pour trouver la première forme solution de l'équation homogène. Mais une fois qu'une en trouvé une, il suffit d'appliquer la méthode de réduction de l'ordre pour trouver la seconde et de nouveau la même méthode pour trouver la solution particulière.

Ici, la forme solution $y_1(t)=1+t$ nous a été suggérée. Il suffit de vérifier en la substituant dans le membre de gauche de l'équation et constater si elle équivaut au membre de droite. :

$$\begin{cases} y_1=1+t \\ y'_1=\_\_\_\_\_\_ \\ y''_1=\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \qquad ty''_1-(1+t)y'_1+y_1=t(\quad)-(1+t)(\quad)+(\quad)=0$$

De même :

$$\begin{cases} y_2=e^t \\ y'_2=\_\_\_\_\_\_ \\ y''_2=\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \qquad ty''_2-(1+t)y'_2+y_2=t(\quad)-(1+t)(\quad)+(\quad)=0$$

Déduction de la solution particulière :

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} (\qquad) & (\qquad) \\ (\qquad) & (\qquad) \end{vmatrix}$$

$$y_p(t)=-(\qquad).\int\frac{(\qquad)(\qquad)dt}{(\qquad)}+(\qquad).\int\frac{(\qquad)(\qquad)dt}{(\qquad)}$$

Soit :

$$y_p(t)=$$

EXERCICE DIRIGÉ 2 :

Dans une équation différentielle linéaire avec conditions initiales : $\begin{cases} y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) \\ y(t_0)=y_0 \\ y'(t_0)=y'_0 \end{cases}$

Montrer qu'on peut écrire la solution sous la forme : $y_s(t)=u(t)+v(t)$, où les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ satisfont respectivement les équations avec conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u''+p(t)u'+q(t)u=0 \\ u(t_0)=y_0 \\ u'(t_0)=y'_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v''+p(t)v'+q(t)v=g(t) \\ v(t_0)=0 \\ v'(t_0)=0 \end{cases}$$

SOLUTION :

Il s'agit de montrer que la solution spécifique au problème avec conditions initiales peut être décomposée en une solution qui satisfait l'équation homogène associée avec les mêmes conditions initiales et une solution spécifique à l'équation générale avec conditions initiales nulles.

Il suffit pour cela de sommer les deux équations membre à membre :

$$\underbrace{u''+p(t)u'+q(t)u}+\underbrace{v''+p(t)v'+q(t)v}=0+g(t) \quad \Leftrightarrow \quad (u''+v'')+p(t)(u'+v')+q(t)(u+v)=g(t)$$

de sorte que $y_s(t)=u(t)+v(t)$ satisfait l'équation originelle. Maintenant il faut montrer que cette solution $y_s(t)$ satisfait aussi les conditions initiales d'origine, or :

$$\begin{cases} y_s(t_0)=u(t_0)+v(t_0)=y_0+0=y_0 \\ y'_s(t_0)=u'(t_0)+v'(t_0)=y'_0+0=y'_0 \end{cases} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

En fait on a pu décomposer la solution spécifique en une somme de 2 solutions spécifiques à des problèmes avec conditions initiales qui peuvent se combiner pour reformer le problème avec conditions initiales originelle. Cette technique sera d'intérêt permettant de trouver plus facilement et séparément $u(t)$ et $v(t)$ au lieu de chercher directement $y_s(t)$.

EXERCICE DIRIGÉ 3 : MÉTHODE DE RÉDUCTION DE L'ORDRE POUR ÉQUATION NON-HOMOGÈNE

On peut utiliser la méthode de réduction d'ordre pour trouver la solution générale à partir d'une première forme solution $y_1(t)$, à la condition poser : $y_{2+p}(t) = v(t)y_1(t)$ et trouver le $v(t)$ qui satisfait l'équation du premier ordre suivant :

$$\left[y_1(t)\right]v''+\left[2y'_1(t)+p(t)y_1(t)\right]v' = g(t)$$

Appliquer cette méthode pour le problème suivant : $\begin{cases} ty''-(1+t)y'+y=t^2e^{2t} \quad \forall t>0 \\ y_1(t)=1+t \end{cases}$

SOLUTION :

Nous allons voir qu'en fait, la forme $y_{2+p}(t)$ trouvée contiendra à la fois la seconde forme solution $y_2(t)$ de l'équation homogène associée et la solution particulière $y_p(t)$ de l'équation générale qui est indépendante de $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

Il s'agit en fait du même problème qu'en exercice dirigé 1, mais où a retiré l'indication sur la seconde forme solution.

Posons donc : $\begin{cases} y_{2+p}(t) = v(t)y_1(t) \\ y'_{2+p}(t) = v'(t)y_1(t)+v(t)y'_1(t) \\ y''_{2+p}(t) = v''(t)y_1(t)+2v'(t)y'_1(t)+v(t)y''_1(t) \end{cases}$

De sorte que l'équation générale devient :

$$\left[v''(t)y_1(t)+2v'(t)y'_1(t)+v(t)y''_1(t)\right]+p(t)\left[v'(t)y_1(t)+v(t)y'_1(t)\right]+q(t)\left[v(t)y_1(t)\right]=g(t)$$

Soit encore :

$$v(t)\underbrace{\left[y''_1(t)+p(t)y'_1(t)+q(t)y_1(t)\right]}_{=0}+v'(t)\left[2y'_1(t)+p(t)y_1(t)\right]+v''(t)\left[y_1(t)\right]=g(t)$$

d'où l'équation du premier ordre à résoudre en $v(t)$:

$$v'(t)\left[2y'_1(t)+p(t)y_1(t)\right]+v''(t)\left[y_1(t)\right]=g(t)$$

Or nous savons la solution générale pour une telle équation, à condition de la ramener à la forme standard :

$$v''(t)+v'(t)\left[2\frac{y'_1(t)}{y_1(t)}+p(t)\right]+=\left[\frac{g(t)}{y_1(t)}\right] \quad \Rightarrow \quad v'(t)=e^{-\int\left[2\frac{y'_1(t)}{y_1(t)}+p(t)\right]dt}\left[\int e^{\int\left[2\frac{y'_1(t)}{y_1(t)}+p(t)\right]dt}\frac{g(t)}{y_1(t)}dt+c_2\right]$$

$$v'(t)=\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}\left[\int\left(e^{\int p(t)dt}y_1(t)g(t)\right)dt+c_2\right] \Rightarrow v(t)=c_2\int\left(\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}\right)dt+\int\left[\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}\int\left(e^{\int p(t)dt}y_1(t)g(t)\right)dt\right]dt+\tilde{c}_1$$

d'où la solution générale :

$$y_g(t)=y_1(t)+v(t)y_1(t)=\underbrace{y_1(t)+\tilde{c}_1y_1(t)}_{c_1y_1(t)}+c_2\underbrace{y_1(t)\int\left(\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}\right)dt}_{y_2(t)}+\underbrace{y_1(t)\int\left[\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2(t)}\int\left(e^{\int p(t)dt}y_1(t)g(t)\right)dt\right]dt}_{y_p(t)}$$

Toutes ces primitives semblent bien compliquées à suivre, mais se simplifient lors d'introduction directe des valeurs d'application, car les primitives se calculent une à une, au fur et à mesure :

$$ty''-(1+t)y'+y=t^2e^{2t} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y''-\left(\frac{1+t}{}\right)y'+(\quad)y=(\quad) \\ y_1(t)=1+t \\ p(t)=(\qquad) \\ q(t)=(\qquad) \\ g(t)=(\qquad) \\ e^{-\int p(t)dt}=(\qquad) \end{cases}$$

d'où l'expression de $v(t)$:

$$v(t)=c_2\int\left(\frac{\qquad}{\qquad}\right)dt+\int\left[\frac{\qquad}{\qquad}\int\left(e^{\int(\qquad)dt}(\qquad)(\qquad)\right)dt\right]dt+\tilde{c}_1$$

d'où la solution générale :

$$y_g(t)=c_1(\qquad)+c_2(\qquad)+(\qquad)$$

Et est-ce que votre réponse ressemble à ceci?

$$y_g(t)=c_1(1+t)+c_2e^t+\frac{t-1}{2}e^{2t}$$