Matematician si filozof german,Gottlob Frege a fost fondatorul logicii matematicii moderne ,a descoperit ideile fundamentale care au făcut posibila dezvoltarea logicii moderne. Gottlob Frege s-a născut la 8 noiembrie 1848 in Wismar ,Germania .In 1869 s-a înscris la Universitatea din Jena unde a fost student timp de doi ani. Pentru inca doi ani a studiat matematica,fizica,chimia la Universitatea din Gottingen. Si-a petrecut întreaga viata active pe postul de profesor la Jena predând din toate ramurile matematicii .In 1879 Frege a publicat cartea « Scrieri conceptuale » in care ,pentru prima data a fost prezentat un sistem de logica matematica in sens modern.A urmat o perioada de munca asidua in filozofia logicii si a matematicilor care s-a sincronizat in cartea "Fundamentele aritmeticii "publicata in 1884 ,o capodopera in materia scrierilor filozofice. In 1902 au fost puse in evidenta unele erori din sistemul sau logic de către Bertrand Russell. Acest fapt i-a influenţat viata personala definitiv.

Gottlob Frege si explicarea conceptului de număr pe baza noţiunilor logice

Frege a intrat în istoria filosofiei nu în calitate de creator al vreunui sistem filosofic. Epoca sistemelor filosofice era revolută şi, pe de altă parte, Frege era şi vroia să fie matematician, înseşi căutările sale logice au o unică motivaţie: fundarea aritmeticii pe o bază logicistă, ca un corp deductiv de propoziţii exratione, non-factuale, apriorice, logic-necesare Rezultatele extraordinare la care a ajuns in logică trebuiau ele însele fundate teoretic, nu mai puţin decât întregul program logicist; aşa se face că, pornind din sfera matematicii, Frege a ajuns la filosofia matematicii, la filosofia logicii şi la filosofia limbajului.

> *"Matematicienii au construit in ultimele decenii o noua logica. Au fost siliti sa faca acest lucru de impasul, de criza findamentala a matematicii, deoarece in aceasta criza, veche logica a esuat cu desavarsire. S-a constatat nu doar insuficienta ei, ci altceva, mai grav, cel mai grav lucru ce i se poate intampla unei teorii stiintifice: anume ca duce la contradictii. Acest fapt a constituit cel mai puternic impuls pentru construirea noii logici. Aceasta evita contradictiile celei vechi; insa, dincolo de acest merit de ordin negativ, noua logica a adus deja dovada unei capacitati pozitive; pana acum, ce-i drept, doar in domeniul reexaminarii si reasezarii bazelor matematicii."*
>
> **RUDOLF CARNAP**

Frege a dedus aritmetica din logica. Este meritul lui de a fi explicat notiunea de numar cu ajutorul notiunilor logice. Acest lucru conduce la ideea ca adevarurile aritmetice sunt a priori analitice (idee in opozitie cu convingerile lui Kant care sustinea ca toate adevarurile matematice sunt a priori sintetice). Frege respinge conceptia naiva conform careia numerele naturale ar fi un dat definitiv. In timp ce s-au introdus operatii matematice cu ajutorul carora s-au format ecuatii ce au necesitat extinderea notiunii de numar la Z, Q, R, C, numerele naturale erau privite ca fiind ceva existent. In ciuda numeroaselor incercari, matematicienii nu au reusit (pana la Frege) sa explice ce este, de fapt, un numar. Tot ce au putut ei a fost sa descrie cum s-a ajuns la reprezentarea numarului, nu ce este un numar. Frege considera ca exista un "izomorfism" intre diferenta dintre descrierea aparentei unei reprezentari a unui concept si o definitie a acestuia pe de o parte, respectiv diferenta dintre conditiile subiective ce fac ca o propozitie sau o credinta sa intre in constiinta noastra si valoarea ei de adevar, pe de alta parte.

> "*Sa nu se ia descrierea unei reprezentari drept o definitie si nici indicarea conditiilor sufletesti si fizice necesare intrarii unei propozitii in constiinta noastra drept o dovada si sa nu se confunde procesul gandirii sau simtirii unei propozitii cu adevarul ei".*

(Frege)

Frege este cel care a pus in evidenta pentru prima data diferenta dintre semnalmente si caracteristici. Astfel "rosu" este o caracteristica a tuturor obiectelor care apartin notiunii de "obiect rosu"; rosu este deci semnalmentul acestei notiuni , dar nu caracteristica ei.

Caracteristicile se pot atribui atat obiectelor, fiind in acest caz caracteristici de gradul 1, cat si notiunilor, fiind in acest caz caracteristici de gradul 2. Notiunea de balena se subsumeaza notiunii de mamifer insa notiunea nu este mamifer. Semnalmentele notiunii supraordonate devin caracteristici nu pentru notiune, ci pentru obiectele ce cad sub incidenta acestei notiuni. Notiunea de notiune este o notiune de gradul 2, notiunea de notiune de notiune este o notiune de gradul 3, samd, obtinandu-se astfel un lant ascendent nestationar. Niciodata nu se poate obtine o caracteristica de gradul 1 pentru o notiune.

Frege pleaca de la ideea ca un numar nu este ceva ce poate fi atribuit unor obiecte separate. Notiunile, in schimb, au caracteristica de a li se putea atribui un numar; acesta insusi nu este insa o caracteristica a notiunii. Numerele nu sunt prin urmare nici notiuni, nici nume proprii, ci apartin unei a treia categorii. Pentru a raspunde la intrebarea ce este un numar, Frege foloseste "definitia prin abstractizare", ceea ce inseamna ca se trece de la vechiul mod de vorbire la altul nou.

El defineste conceptul de numar prin atribuirea unei multimi (de exemplu: 12 luni) alteia (de exemplu: 12 apostoli). Abia cand intelegem un anumit numar, deci cand il recunoastem il putem atribui.

Recunoastem ceva atunci cand avem un criteriu de identitate. Frege ofera un exemplu din geometrie, anume identitatea paralelismului si directiei a doua drepte, pe care le foloseste pentru definitia notiunii de directie.

g||h (paralelism cosiderat in cadrul geometriei plane si in sens larg, in sensul ca $g||h \Leftrightarrow ((g \cap h = \emptyset$ sau $(g=h))$. Paralelismul in sens larg a fost introdus pentru ca "||" sa fie o relatie de echivalenta in sens larg; acest lucru se mai poate exprima si in felul urmator: directia dreptei g este aceeasi cu directia dreptei h. Directia unei drepte se defineste prin urmare ca fiind ceea ce este acelasi lucru atunci cand dreptele g si h sunt paralele. Ceea ce inseamna ca sfera notiunii dreapta paralela cu g este egala cu sfera notiunii dreapta paralela cu h. asa cum in geometrie se introduce in mod analog cuvantul numar ca fiind ceea ce este egal daca doua notiuni sunt echivalente numeric. Numarul este definit astfel ca fiind sfera notiunii.

Numarul atribuit notiunii P $\Leftrightarrow$ sfera notiunii P

In acest fel se evidentiaza relatia aritmeticii cu logica deoarece sferele notiunilor apartin domeniului logicii.

> *"Sper sa fi evidentiat caracterul probabil al faptului ca legile aritmeticii sunt judecati analitice si nu sintetice si prin urmare a priorice. Prin urmare, aritmetica nu ar fi altceva decat o logica dezvoltata, iar fiecare propozitie aritmetica o lege logica, insa una derivata. Aplicatiile aritmetice in explicarea naturii ar fi prelucrari logice ale unor stari de fapt observate; a socoti ar insemna de fapt a trage concluzii"*
>
> (Gottlob Frege).

O modelare matematica a celor sustinute de Frege este urmatoarea: obiectelor le asociem elemente iar notiunilor multimi. Faptul ca un obiect intra sub incidenta unei notiuni este echivalent cu faptul ca elementul asociat acelui obiect apartine multimii asociate acelei notiuni. Fie G multimea asociata unei notiuni Q. Avem ca $G \subset P(G)$ (unde prin P(G) se intelege multimea partilor lui G). Deci G este un element al lui P(G), asa cum Q devine un obiect pentru notiunea de *notiune*. P(G) este o multime asociata notiunii de notiune, care am vazut ca la Frege este o notiune de gradul 2. Mai departe P(P(G)) corespunde notiunii de notiune de notiune care este o notiune de gradul 3 samd.

Este cunoscut faptul ca intre G si P(G) putem defini in mod canonic o functie injectiva si ca nu exista bijectie intre G si P(G). Altfel spus G&ltP(G) si ca urmare G&ltP(G)&ltP(P(G))&ltP(P(P(G)))<.., adica am obtinut un lant ascendent nestationar la fel ca in cazul notiunilor.>

De asemenea, pe o anumita multime de multimi putem defini relatia de echivalenta (mai exact de cardinal-echivalenta) » definita prin $A\approx B\Leftrightarrow\exists\ f{:}A\to B$ bijectiva. Ideea a pornit de la cunoscutul rezultat ca intre doua multimi finite exista o bijectie daca si numai daca au acelasi numar de elemente, altfel spus pentru doua multimi finite avem ca $A\approx B\Leftrightarrow$A si B au acelasi numar de elemente.
Πυτεμ δεφινι αχυμ νοτιυνεα δε νυμαρ χα φιινδ ο χλασα δε εχηιϖαλεντα ιν ραπορτ χ υ ρελατια ≈, ασα χυμ Φρεγε δεφινεα ιν μοδ ασεμανατορ νοτιυνεα δε νυμαρ χα φιινδ (ιν μοδ ιμπλιχιτ) ο χλασα δε εχηιϖαλεντα ιν ραπορτ χυ ρελατια δεφινιτα πριν φαπτ υλ χα νοτιυνεα Σ, νοτιυνεα Π⇔S si P sunt echivalente numeric.