Academia de studii economice
Sectia Economie-Matematica
Facultatea de Cibernetica, Statistica si Informatica Economica

Model de echilibru regional

Manolciu Ramona – Cristina
An IV, Grupa 1075

Aprilie 2000

Problema complementara, formulare si definire a conceptelor

Teoria complementaritatii este deosebit de importanta, deoarece unifica problemele din domenii foarte diferite cum ar fi: programarea matematica, teoria jocurilor, teoria echilibrului economic, teoria echilibrului in probleme de transport, etc…

In mod obisnuit,teoria omplementara este privita ca un capitol de programare matematica. De exemplu,codul ei in clasificarea AMS(American Mathematical Society) este 90C33. Codul 90XXX este specific economiei-matematice, cercetarilor operationale si jocurilor, in timp ce 90CXX este specific programarii matematice. Se poate concluziona ca problema poate fi inclusa in clasa problemelor de optimizare si a celor de echilibru.

Problema complementara acopera domenii foarte profunde, interesante si dificile ale matematicii si economiei. Ea stabileste in acelasi timp un teren foarte propice cercetarii, realizand interconexiuni intre capitole importante din economie si analiza neliniara.

Numita initial ‘ problema compozita’, ‘fundamentala’ sau de ‘pivotare complementara’, problema a fost privita pentru prima oara, ca o problema de sine statatoare de catre W.S. Dorn. In 1963, Dantzing si Cottle generalizeaza rezultatele lui Dorn, iar in 1965 Lemke propune PC ca o metoda de rezolvare a jocurilor.

In mod cert, unul din primele articole semnificative referitoare la importanta aplicatiilor PC in inginerie este cel al lui A.W. Ingleton.

Din punct de vedere matematic, problema complementara liniara(PCL) se poate formula astfel: fiind data functia $f : R^n \to R$***, sa se determine*** $x \in R^n$ ***asa incat:***

$$x \geq 0$$
$$q + Mx \geq 0$$
$$x^T (q + Mx) = 0$$

unde f(x)=q+Mx, $M \in R^{nn}$***,*** $q \in R^n$***.***

Generic, problema PCL va fi definita de perechea (q, M).

Notand w=q+Mx, conditia (3) devine $x_i w_i = 0, i = \overline{1,n}$ ***si astfel problema PCL va fi reformulata:***

$$w \geq 0, x \geq 0$$
$$w = q + Mx$$
$$x^T w = 0$$

In acest caz, variabilele x_i ***si*** w_i ***formeaza o pereche complementara in sensul ca cele doua variabile sunt complementare una alteia(daca una este nula, atunci cealalta este in mod obligatoriu nenula).***

Vectorii x ***si*** w ***din*** R^n ***sunt aproape complementari in raport cu indicele*** $k \in \overline{1,n}$ ***daca*** $x_i w_i = 0$ ***pentru orice*** $i \neq k$***.***

O forma extinsa a PCL(q,M), un scalar $\chi \geq 0$ ***si un vector d>0, consideram PCL extinsa*** $(\overline{q}, \overline{M})$***, unde :***

$$\overline{q} = \begin{pmatrix} \chi \\ q \end{pmatrix}, \ \overline{M} = \begin{pmatrix} o - d^T \\ d\, M \end{pmatrix} \quad (7)$$

Se pune problema existentei unei solutii a PCL extinse, adica a unui vector x ***si a unui scalar*** ϕ ***astfel incat:***

$$\sigma = \chi - d^T x \geq 0, \phi \geq 0, \sigma\phi = 0$$
$$w = q + Mx + \phi d \geq 0, x \geq 0, w^T x = 0$$

Se observa imediat ca daca (x^*, ϕ^*) ***este o solutie pentru*** $(\overline{q}, \overline{M})$***, cu*** $\phi^* = 0$***, atunci*** x^* ***este o solutie a PCL(q, M).***

➢ Model de echilibru regional

Modelele de echilibru regional sunt cele care studiaza comportamentul in spatiu al agentilor economici.Procesele economice sunt analizate din punctul de vedere al dispunerii lor spatiale.

Modelele clasice se bazeaza pe ipoteza 'punctualitatii' economiei si ignora, de obicei, aspectul situarii geografice a agentilor si pietelor. Problemele esentiale ale analizei economice ca, de exemplu, ce trebuie produs, cum trebuie produs, pentru cine trebuie produs, sunt studiate fara a lua in calcul distantele, costurile de transport sau alte neajunsuri generate de dimensiunea pietei. Aceste imperfectiuni sunt inlaturate cu ajutorul modelului regional.

Avand in vedere ca activitatile economice sunt derulate nu doar in timp, ci si in spatiu, modelele regionale introduc acest ultim concept. Notiunea de *regiune* ***defineste astfel un subsistem spatial al unei economii.***

Inca din 1952, Samuelson sugera formularea unor probleme de optimizare si echilibru pentru piete separate spatial, care pot fi privite ca noduri ale unei retele in care costurile de transport sunt luate in mod explicit in considerare.

Modelul de echilibru spatial prezentat in continuare poate fi redus la o optimizare, dar care va fi detaliat ca o problema complementara. Acest model este de fapt o generalizare a problemei de transport.

Presupunem ca exista doua sau mai multe regiuni intre care se schimba produse omogene. Sistemul considerat este unul interconectat cu *m* ***surse si*** *n* ***destinatii.***

La fiecare sursa este disponibil un singur tip de produs care este solicitat in diferite cantitati(posibil nule) la destinatii. Dupa cum vom vedea, aceasta presupunere nu restrange generalitatea modelului, deoarece el poate fi aplicat atat in cazul unui singur produs, dar si in cazul mai multor produse.

In vederea realizarii modelului matematic, vom introduce urmatoarele notatii:

$x \in R^n$ ***(vector oferta)***

$y \in R^n$ ***(vector cerere sau vector al consumurilor pentru cele n destinatii)***

$p_{s_i} : R^m \to R$ ***(costul unitatii de produs la sursa I)***

$p_s : R^m \to R^m$ ***(vector al costurilor la sursa)***

$p_{d_j} : R^n \to R$ ***(costul unitatii de produs la destinatia j)***

$p_{d_j} : R^n \to R^n$ ***(vector al costurilor la destinatie)***

$z \in R^{mn} \quad z = (z_{11}..z_{1n}, z_{21}..z_{2n},..z_{m1}..z_{mn} \quad)^T$

(cantitatile de produse vehiculate intre surse si destinatii)

$t : R^{mn} \to R^{mn}$

(cost unitar de transport de la sursa I la destinatia j)

$\gamma \in R^m$

(vector al preturilor de piata la surse)

$\chi \in R^m$

(vector al preturilor de piata la destinatie)

$G_x \in R^{m*mn}$

(matrice cu toate elementele nule, excptand elementele de pe pozitia i din coloanele (i-1)n+k, i=1,m j=1,n , care sunt 1)

$G_y \in R^{n*mn}$

(matrice cu toate elementele nule, excptand elementele de pe pozitia j din coloanele j+nk, k=1,m-1 j=0,n-1 , care sunt 1).

Rezolvarea problemei de echilibru consta in determinarea vectorilor x, y, z, χ, γ ***astfel incat:***

(i) $\gamma \le p_S(x)$

(costul unui produs la sursa este mai mare sau egal decat pretul de piata la sursa respectiva)

(ii) $x^T\left(p_S(x)-\gamma\right)=0$

(daca oferta x_i este strict pozitiva, atunci pretul de piata de la sursa i este egal cu costul produsului de la sursa respectiva)

(iii) $\chi \geq p_d(y)$

(costul unui produs la destinatie este mai mic sau egal decat pretul de piata la destinatia respectiva)

(iv) $y^T\left(\chi - p_d(y)\right)=0$

(daca cererea y_j este strict pozitiva, atunci pretul de piata de la destinatia j este egal cu costul produsului de la destinatia respectiva)

(v) $G_y^T\chi \leq G_x^T\gamma + t(z)$

(diferenta dintre preturile de piata la destinatii si surse este mai mica sau egala cu costul unitar de transport)

(vi) $\left(\ \gamma^T G_x + t(z) - \chi^T G_y\ \right)^T z = 0$

(daca fluxul z_{ij} este strict pozitiv, atunci diferenta dintre preturile de piata este egala cu costurile de transport)

(vii) $G_x z \leq x$

(oferta este mai mare sau egala cu cantitatea de produs transportata din regiune)

(viii) $\gamma^T\left(x - G_x z\right)=0$

(daca pretul de piata la sursa i este strict pozitiv, atunci intreaga cantitate de produs va fi transportata la acea sursa)

(ix) $G_y z \geq y$

(cererea este mai mica sau egala cu cantitatea de produs intrata la fiecare destinatie)

(x) $\chi^T\left(G_y z - y\right)=0$

(daca pretul de piata la destinatia j este strict pozitiv, atunci y_j este egala cu intreaga cantitate de produs adusa in regiune)

(xi) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \gamma \geq 0, \chi \geq 0$

Observatii:

- ***In cazul mai multor produse, trebuie rezolvate mai multe probleme de acest tip(egal cu numarul de produse) in care sursele ca si destinatiile pot fi identice, din punct de vedere fizic, dar sa corespunda unor produse diferite.***
- ***Preturile de piata sunt exogene regiunilor considerate.***
- ***Daca*** $t_{ij}(z) = t_{ij} \in R_+,\ p_S(x) = \gamma,\ p_d(y) = \chi$ ***se obtine o problema de transport 'clasica',*** γ, χ ***fiind variabile duale(preturi umbra).***

Consideram urmatoarea problema de transport:

$$\begin{array}{lcl} \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} z_{ij} & & \min t^T z \\ \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \le x_i,\ i = \overline{1,m} & \Leftrightarrow & G_x z \le x \\ \sum_{i=1}^{m} z_{ij} \ge y_j,\ j = \overline{1,n} & & G_y z \ge y \\ z_{ij} \ge 0 & & z \ge 0 \end{array}$$

Gasim problema duala asociata:

$$(P)\ \begin{array}{l} \min t^T z \\ \left\{\begin{pmatrix} -G_x \\ G_y \end{pmatrix} z \ge \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}\right. \\ z \ge 0 \end{array} \qquad (D)\ \begin{array}{l} \max\left(-\gamma^T x + \chi^T y\right) \\ \left\{\left(G_x^T, G_y^T\right)\begin{pmatrix} \gamma \\ \chi \end{pmatrix} \le t\right. \\ \gamma \ge 0, \chi \ge 0 \end{array}$$

Conform teoremei ecarturilor complementare, la un cuplul de probleme duale:

$$(P)\ \begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{array} \qquad (D)\ \begin{array}{l} \min b^T y \\ A^T y \le c \\ y \ge 0 \end{array}$$

$$P = \left\{x \in R_+^n \,/\, Ax \ge b\right\} \qquad D = \left\{y \in R_+^m \,/\, A^T y \le c\right\}$$

$x^* \in P$, $y^* \in D$ ***sunt solutii optime ale problemelor daca si numai daca*** $(y^*)^T (Ax - b) = 0$ ***si*** $(c - A^T y)^T x^* = 0$.

In aceste conditii, problema de echilibru devine:

$$(P)\quad \begin{array}{l} \min c^T z \\ \{x - G_x z \geq 0 \\ G_y z - y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{l} \max(-\gamma^T x + \chi^T y) \\ -G_x^T \gamma + G_y^T \chi \leq t \\ \gamma \geq 0, \chi \geq 0 \end{array}$$

Restrictiile in acest caz devin:

(i) $\gamma \leq p_S(x)$

(ii) $x^T (p_S(x) - \gamma) = 0$

(iii) $\chi \geq p_d(y)$

(iv) $y^T (\chi - p_d(y)) = 0$

(v) $G_y^T \chi - G_x^T \gamma \leq t(z)$

(vi) $z^T (\gamma^T G_x + t(z) - \chi^T G_y) = 0$

(vii) $x - G_x z \geq 0$

(viii) $\gamma^T (x - G_x z) = 0$

(ix) $G_y z - y \geq 0$

(x) $\chi^T (G_y z - y) = 0$

(xi) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \gamma \geq 0, \chi \geq 0$.

Deoarece $p_S(x) = \gamma, p_d(y) = \chi$***, primele 4 conditii devin de superflue.***

Problema determinarii echilibrului in acest model este echivalenta cu urmatoarea PC:

Sa se determine $u \in R^{2m+2n+mn}$ ***astfel incat:***

$$u \geq 0$$
$$F(u) \geq 0$$
$$u^T F(u) = ()$$

unde $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \gamma\chi \end{pmatrix}$***;*** $\quad F(u) = \begin{pmatrix} p_S(x) - \gamma \\ \chi - p_d(y) \\ \gamma^T G_x + t(z) - \chi^T G_y \\ x - G_x z \\ G_y z - y \end{pmatrix}$**.**

Daca functiile p_S, p_d, t ***sunt integrabile, adica sunt gradientii*** $p_S(x) = \nabla f(x), p_d(y) = \nabla g(y), t(z) = \nabla \tau(z)$***, atunci conditiile Kuhn-Tucker se vor scrie:***

$$\min f(x)$$
$$g_i(x) \leq 0, i = 1, m \qquad\qquad L(x,\chi) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \chi_i g \ (x)$$
$$x \geq 0$$

Conditiile de optim vor fi:

$$\nabla_x L(x,\chi) \geq 0$$
$$-\nabla_\chi L(x,\chi) \geq 0$$
$$x^T \nabla_x L(x,\chi) = 0 \qquad .$$
$$\chi^T \nabla_\chi L(x,\chi) = 0$$

Cazul integrabil este tratat practic ca o problema de programare patratica.

Pentru cazul neintegrabil, cand problema de echilibru corespunde unei probleme de programare matematica.

Bibliografie

- ***Batten, D.F., Fischer, M.M., Hewings, G.J.D., Nijkamp, P., Snickamp, F., Advanced in Spacial Science, Springer - Verlag, Berlin, New York 1996***
- ***Cottle, R.W., Pang,J.S., Stone, The liniar Complementarity Problem, Academic Press, Inc.,1992***
- ***Irwin, C.L., Yang, C.W., Iteration and Sensitivity of a Spatial Equilibrium Problem with Supply and Demand Functions, Operations Research, vol. 30, 1982***
- ***Siebert, H., Regional Economic Growth: Theory and Policy, International Textbook Company, 1968***
- ***Sommerschuh, J.. Properties of the general quadratic optimization problem and the corresponding linear complementary problem, Optimization, 18,1987***